

THÈSE

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES DE
L'UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

pour obtenir le

DIPLOME DE DOCTEUR EN PHYSIQUE
Mention Mécanique

par

CHARMOILLAUX Jean-François

Licencié es-sciences (option physique)

**CONTRIBUTION A L'ETUDE DES PHÉNOMÈNES
VIBRATOIRES DES SCIES A RUBAN**



Soutenue le Jeudi 25 septembre 1980 devant la commission d'examen :

M. CHALEAT, Professeur

Président

M. LALLEMENT, Professeur

M. FILLOT M.A., Docteur es-sciences

M. LECOANET, Chargé de recherche, Docteur es-sciences

} Examinateurs

4^e Diss. Besançon



THÈSE

À LA FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES DE
L'UNIVERSITÉ DE BRUXELLES-COIXE

PAR

DIPLOME DE DOCTEUR EN PHYSIQUE

Digitized by the Internet Archive
in 2026

CHARVOILLAX Jean-François

Ingénieur en chef, Institut National de la Recherche Scientifique

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DES PHÉNOMÈNES
VIBRATOIRES DES SCIÈS À RUBAN



Présentée le 26 juillet 1980 devant le jury composé de :

M. CHALET, Président

M. LAMBERT

THÈSE

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES DE
L'UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

pour obtenir le

DIPLOME DE DOCTEUR EN PHYSIQUE
Mention Mécanique

par

CHARMOILLAX Jean-François

Licencié es-sciences (option physique)

**CONTRIBUTION A L'ETUDE DES PHÉNOMÈNES
VIBRATOIRES DES SCIES A RUBAN**



Soutenue le Jeudi 25 septembre 1980 devant la commission d'examen :

M. CHALEAT, Professeur

Président

M. LALLEMENT, Professeur

M. FILLOT M.A., Docteur es-sciences

M. LECOANET, Chargé de recherche, Docteur es-sciences

} Examinateurs

UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ BESANÇON

Président : Monsieur le Professeur Jacques ROBERT

FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES

DOYEN

M. le Professeur Jean BULABOIS
Physique Générale-optique

ASSEESSEURS

M. le Professeur Bernard MILLET
Botanique
M. Robert GUYETANT, Maître-Assistant
Biol. animale Ecologie

PRÉSIDENTS HONORAIRES

MM. THIEBAUT, LÉVÉQUE

DOYENS HONORAIRES

MM. GLANGEAUD, JACQUEMAIN, CHATELET, THIEBAUT, BERNARD

PROFESSEURS HONORAIRES

MM. BENNETON, CHATELET, MESNAGE, QUANTIN, THEOBALD N., THIRY,
TRILLAT, TRONCHET, UEBERSFELD

MM. BANTEGNIE Robert	: Mathématiques
BENILAN Philippe	: Mathématiques
BERNARD Jean	: Chimie Physique
BIDAULT Michel	: Taxonomie expérimentale
BROQUET Paul	: Géologie
BRUCKERT Sylvain	: Ecologie végétale
BULABOIS Jean	: Physique Gle optique
CAPODANNO Pierre	: Mécanique théorique
CERUTTI Ernest	: Chimie appliquée
CHALEAT Raymond	: Mécanique appliquée
CHARDON J-Claude	: Spectroscopie
CHAUVE Pierre	: Géologie minéralogie
COUGNARD Jean	: Mathématiques
DEVIN Claude	: Chimie 1er cycle
DOBREMEZ Jean-Fr.	: Biologie
DUBOUCHET Jacques	: Physiologie végétale
GALATRY Louis	: Physique moléculaire
GAUDEMER Yves	: Biochimie
GIRARDET Claude	: Physique Moléculaire
GOMOT Lucien	: Zoologie-Embryologie
GOUARNE René	: Mathématiques
GRAS Georges	: Mathématiques
GREMILLARD Jean	: Mathématiques
KARCHE J-Paul	: Pétrographie Minéralogie
LALLEMENT Gérard	: Mécanique appliquée
LAUDE Bernard	: Chimie organique
LESAINTE Pierre	: Mathématiques I

LHOTE François	: Automatique
MERIGOUX Henri	: Cristallographie et Synthèses minérales
MIELLOU J-Claude	: Analyse numérique
MILLET Bernard	: Botanique
MONTAGNER Hubert	: Psychophysiologie
MOREELS Guy	: Astronomie
OLIVIER Marchel	: Electroniq. quantique
OYTANA Claude	: Mécanique appliquée
PAGETTI Jacques	: Corrosion et traitements de surface
PARIZET Jean	: Mathématiques
PLUVINAGE Philippe	: Physique théorique
POTIER Robert	: Physique des solides
RANGHEARD Yves	: Géologie
RIPPLINGER Jean	: Physiologie animale
ROBERT Daniel	: Physique
ROBERT Guy	: Electrochimie
ROBERT Jacques	: Mathématiques I
THEOBALD J-Gérard	: Spectroscopie hertzienne
THIEBAUT Jean	: Pétrogr. minéralogie
TREHEL Michel	: Informatique
VERNEAUX Jean	: Zoologie-Embryologie
VIENOT Jean-Charles	: Physique Gle optique
WEIL Michel	: Mathématiques

Responsable des services administratifs :
M. Jean-Marie RUNGE

Professeurs des Instituts Universitaires de Technologie dont les activités de Recherche sont rattachées à la Faculté des Sciences et des Techniques de Besançon

I.U.T. de BESANÇON

MM. GENTYL Claude	Spécialité : Physique
MARTINET André	Spécialité : Chimie
SONZOGNO Robert	Spécialité : Mécanique

I.U.T. de BELFORT

MM. KAUFFMANN J-Marie	Spécialité : Electrotechnique
MANDRET Gérard	Spécialité : Electronique
OIKNINE Claude	Spécialité : Mécanique
PRENEL Jean-Pierre	Spécialité : Physique
STAMON Georges	Spécialité : Informatique

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DES

ÉLÉMENTS VÉGÉTAUX

DES SÉCHES À FUMER

A mes parents

A ma femme

CONTRIBUTION A L'ETUDE DES
PHENOMENES VIBRATOIRES
DES SCIES A RUBAN

Que Monsieur le Professeur CHALEAT, Directeur du Laboratoire de Mécanique Appliquée, veuille bien trouver ici l'expression de ma respectueuse reconnaissance et de ma profonde gratitude.

Par ailleurs, je présente mes plus vifs remerciements à Monsieur LALLEMENT et à Monsieur FILLOD qui ont bien voulu accepter d'être membres du jury.

Je tiens à remercier particulièrement Monsieur LECOANET dont les conseils et les encouragements m'ont aidé à vaincre lors des moments difficiles.

Je ne saurais oublier Monsieur BALBI et Monsieur PIRANDA qui ont bien voulu me gratifier de leur dévouement et de leur temps.

Enfin, je remercie Mademoiselle COSTILLE qui a assuré avec beaucoup de diligence et d'efficacité la frappe et la présentation de ce travail.

S O M M A I R E

=====

<u>INTRODUCTION</u>	1
<u>CHAPITRE I : Etude bibliographique</u>	
I. Résultats concernant la stabilité des lames de scie	2
I.1. Stabilité de position	
111. Définition	2
112. Tensionnement	3
1121. Modification de la géométrie du ruban	3
1122. Etude théorique du tensionnage	4
1123. Utilité du tensionnage	5
I.2. Stabilité de la lame à la déformation	6
II. Résultats concernant les vibrations des fils flexibles, courroies et rubans entraînés	7
<u>CHAPITRE II : Etude de la lame de scie à ruban considérée comme un fil</u>	
I. Hypothèses utilisées	9
II. Mise en équation	10
II.1. Equations d'équilibre	10
211. Equilibre des forces en projection sur l'axe Oy	10
212. Equilibre des moments en G	11
213. Tension dynamique	12
214. Equation corrigée du mouvement vibratoire	13
III. Etude de l'équation du mouvement	14
III.1. Représentation de la fonction inconnue par la méthode de Galerkin-Bubnov	15

311. Allure de la courbe représentant la variation de la valeur propre fondamentale en fonction de la vitesse de défilement : $s = g(c)$	16
3111. Etude dans le cas d'une vitesse de défilement quasi-nulle	19
3112. Etude au voisinage de $\omega = 0$	20
312. Application de la méthode de Galerkin généralisée	21
III.2. Résolution analytique approchée de l'équation du mouvement	23
321. Etude du mouvement d'une corde parfaitement flexible	24
322. Méthode de résolution de l'équation (28)	26
III.3. Valeurs et modes propres	32
331. Détermination des valeurs propres perturbées	32
3311. Cas du ruban simplement supporté	32
3312. Cas du ruban encastré	36
332. Détermination des modes propres de vibration	38

CHAPITRE III : Etude des vibrations du ruban en présence d'un couplage avec le milieu extérieur

I. Mise en équation du système : Poulie balourdée, ressort, amortissement	46
II. Méthode de résolution de l'équation de mouvement	49
III. Exploitation des résultats	52

CHAPITRE IV : Etude du couplage entre les vibrations transversales, les vibrations longitudinales du ruban et les vibrations du bâti

I. Etude de la première sous-structure	
I.1. Hypothèses	54

I.2. Mise en équation	55
120. Equilibre des forces	55
121. Equilibre des moments en G	56
122. Equations du mouvement	56
I.3. Calculs intermédiaires	57
130. Expression de d^2M/dx^2 , $(d^2M/dx^2) \cdot \cos \theta$, $(d^2M/dx^2) \cdot \sin \theta$	57
131. Expression de $R \cos \theta \cdot \frac{d}{dx} (\sin \theta)$ et $R \sin \theta \frac{d}{dx} (\sin \theta)$	57
132. Expression de $\frac{dN}{dx} \cos \theta$ et $\frac{dN}{dx} \sin \theta$	58
1320. Détermination de la déformation e_1	58
1321. Expression de $\frac{dN}{dx} \cdot \cos \theta$ et $\frac{dN}{dx} \cdot \sin \theta$	60
I.4. Expressions définitives des équations du mouvement d'un tronçon	60
II. Etude de la deuxième sous-structure	62
III. Expression des déplacements d'un point du ruban	63
IV. Calcul de R_3 et R_4	66
V. Interprétation physique des équations (92) ou (94)	67
V.1. Déterminations des vibrations longitudinales propres	67
V.2. Observations et discussion	67
<u>CONCLUSION</u>	70

NOTATIONS

$\vec{A}$	Représentation d'un vecteur
$\vec{B}$	Pseudo-vecteur ou vecteur axial
$\cdot$	Dérivation par rapport au temps
$/$	Dérivation par rapport à l'espace
$[]$	Ouvrage de référence en bibliographie
$()$	Formule de référence
$\vec{T}$	Effort tranchant
M	Moment fléchissant
$\vec{R}$	Effort de Traction
$\vec{R}_s$	Effort de Traction statique
$\vec{R}_d$	Effort dynamique
η	Coefficient correctif
$\chi = 1 - \eta$	
S	Section droite du ruban
l, l_0	Longueur du brin de lame entre support
ρ	masse volumique
μ	masse par unité de longueur
I	Moment d'inertie
J	Moment quadratique
r	Rayon des poulies
Ω	Vitesse angulaire des poulies
$\vec{C}$	Vitesse de translation du ruban
u, v, w	Composantes du vecteur déplacement
E_c	Energie cinétique
E_p	Energie potentielle

$\mathcal{L} = E_c - E_p$ Lagrangien

$s = a + j\omega$ $a < 0$ coefficient d'amortissement

$a > 0$ coefficient de divergence

ω pulsation

L opérateur linéaire

$\tilde{y}$ fonction "solution" approchée

e fonction ou vecteur d'erreur

e_1 déformation

R_c Rayon de courbure

$(*)$ — ou $u_{,x}$

— ou $u_{,t}$

— ou $u_{,xt}$

Notations des dérivées partielles

I N T R O D U C T I O N

Le but de ce travail était de se familiariser avec les problèmes dynamiques rencontrés dans les structures mécaniques comportant des rubans ou des flexibles en mouvement avec ou sans raideur, dont les diverses applications possibles sont les suivantes : bandes de magnétophones, transmissions par câble ou par courroie, tapis roulants et scies à chaînes ou à rubans.

Le premier chapitre est consacré à une étude bibliographique du problème portant sur cent vingt cinq références. L'analyse de ces travaux permet de dégager deux grandes directions de recherches en ce qui concerne les rubans : l'une relative à la "stabilité" et l'autre à l'étude des vibrations de flexion, de tension et de torsion.

La deuxième partie traite plus spécialement des vibrations de flexion d'un ruban en translation, en prenant en considération les termes de raideur. Cette raideur, compte-tenu des réalisations pratiques, s'introduit comme une perturbation singulière.

Dans le troisième chapitre, on cherche l'effet du couplage entre le ruban et la bâti. La solution analytique proposée montre que les vibrations du système lame-bâti sont du type paramétrique.

Enfin, dans le quatrième chapitre, nous mettons en évidence en plus, l'effet de couplage entre les vibrations transversales et longitudinales dues à la déformée de la lame, en tenant compte de l'expression exacte du rayon de courbure et de la déformée instantanée de la lame.



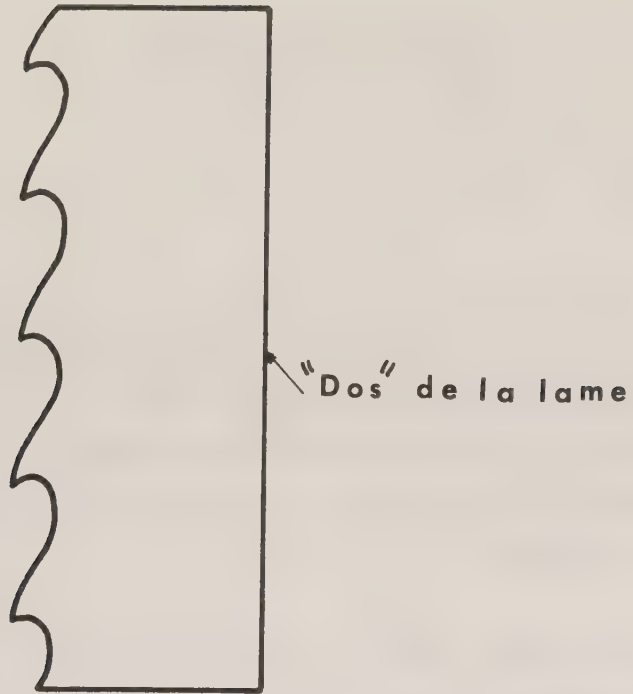


Figure 1

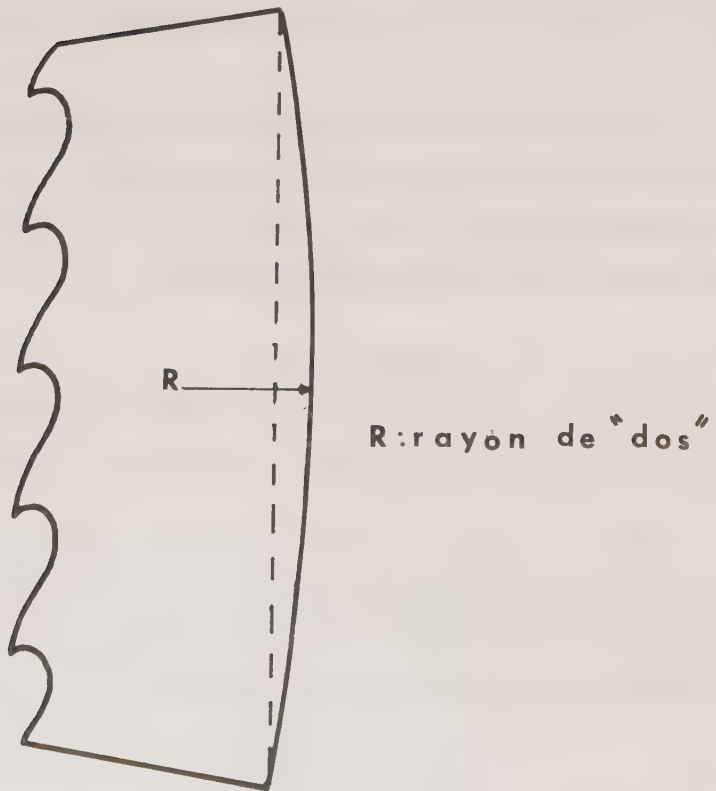


Figure 2

CHAPITRE I

Etude bibliographique

De cette étude il ressort deux idées principales de recherches :

- Etude des problèmes de "stabilité" des lames de scie en mouvement.
- Analyse des vibrations des fils, des rubans et des lames de scie.

En ce qui concerne la stabilité, deux types de problèmes apparaissent :

- Stabilité de la position des lames de scie sur les volants.
- Non-déformation de la lame sous les efforts de coupe.

I.1. RESULTATS CONCERNANT LA STABILITE DES LAMES DE SCIE

Une scie à ruban est constituée essentiellement d'une lame s'enroulant sur deux volants plus ou moins bombés et inclinables dont l'un est moteur.

Bien que trois solutions soient technologiquement possibles, ruban horizontal, incliné à 45° ou vertical, c'est tout du moins ce que préconise M. CHARDIN [22] , nous nous intéresserons uniquement aux scies verticales ; pour ces dernières, le volant inférieur de grand moment d'inertie est moteur, tandis que le volant supérieur présente un moment d'inertie le plus faible possible, compatible avec les efforts auxquels il est soumis.

I.11. STABILITE DE POSITION

111 - Définition

Une lame de scie est dite stable si elle conserve une position convenable sur chaque volant entre deux utilisations.

Cette définition de la stabilité a été donnée par différents auteurs [31, 32 , 114] .

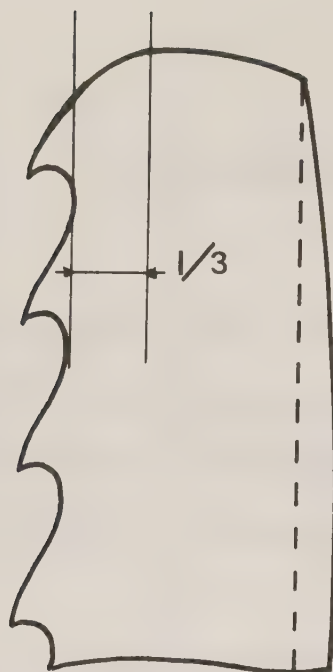


Figure 3

Section A—A



Figure 3'

Remarquons que la mesure du déplacement (en général REcul) de la lame se fait toujours à l'arrêt, bien que les essais aient montré l'influence du fonctionnement sur cette stabilité. On constate en effet :

- . un recul pouvant être important en marche à vide si la tension initiale de la lame est insuffisante ou l'inclinaison des volants inadaptée.

- . une influence de la force due à l'avance du bois.

- . une influence de la géométrie de la lame et de son inhomogénéité créée intentionnellement par préformage ou "tensionnement".

112 - Tensionnement

Tous les travaux concernant cette stabilité indiquent l'effet prépondérant du tensionnement.

Le tensionnement ou tensionnage est un procédé utilisé empiriquement depuis la fin du XIXe siècle dans l'industrie du bois : il a pour effet de créer artificiellement dans la lame des contraintes internes soit mécaniquement par roulage [1,7,12,13,14,32,33] soit encore par un processus thermique qui peut être automatisé pour les procédés les plus récents [30, 31,97] .

Cette technique du Tensionnement n'a pas reçu jusqu'à ce jour un support théorique tel qu'il permette d'analyser correctement les effets bénéfiques constatés.

Décrivons dans un premier temps les effets du Tensionnage sur la lame de scie.

112-1. Modifications de la géométrie du ruban

Nous allons montrer sur schéma les modifications géométriques qui découlent du tensionnage. Deux façons de procéder apparaissent dans la littérature pour les lames à simple denture.

Dans le premier cas, l'opération s'effectue en deux phases :

Dans la première phase, le "dos" de la lame ou "Talon" est très fortement sollicité : la lame neuve "cylindrique" (fig. 1) est ainsi transformée en tronc de cône de telle façon que la partie non dentée prenne une courbure R appelée "rayon de dos" (fig. 2).

Dans la seconde étape, c'est la bande située approximativement à un tiers du bord denté (cote correspondant au bombé des poulies) qui est la plus for-

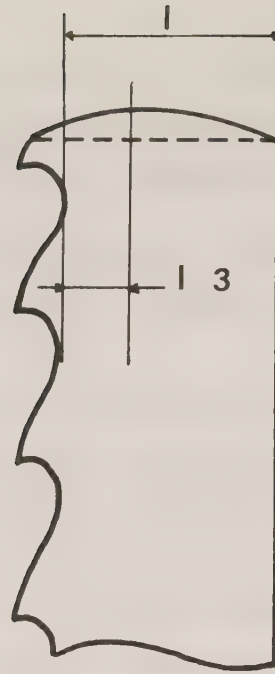


Figure 4

Lame hors
d'usage

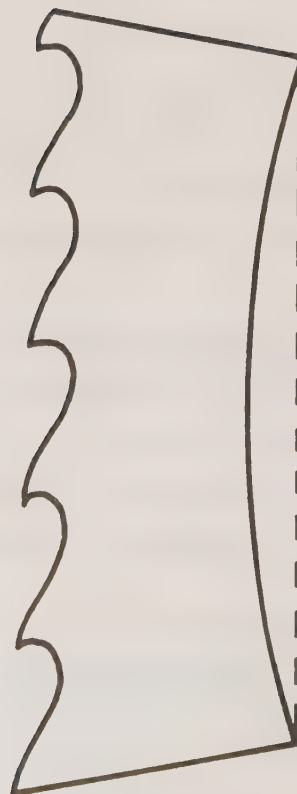


Figure 5

tement "tensionnée" (fig. 3, 3'). Le résultat est de transformer la partie conique en une partie bombée comme le montre le schéma.

Dans le second cas, on supprime seulement la première phase et l'on aboutit au résultat de la figure (4).

Remarques :

1 Il est possible de constater que quelle que soit la méthode utilisée, le tensionnage est dissymétrique dans la largeur du ruban, ce qui n'est pas le cas des lames à double denture.

2 Remarquons qu'après utilisation, une lame ne convenant plus au sciage présente les caractéristiques géométriques suivantes :

- inversion du cône
- inversion de la courbure du dos qui devient négative. fig. (5).

Il est alors nécessaire pour pouvoir réutiliser cette lame de procéder comme dans le premier cas pour obtenir au moins le "dressage" du dos de la lame ($R = \infty$).

Cette deuxième remarque nous permet de penser que l'idée qui a conduit les auteurs japonais [30,31,32,33,34] et Monsieur ABEELS [1,2] à prescrire un rayon de courbure de dos positif est d'accroître la durée d'utilisation de la lame.

3 Observons qu'un retournement accidentel de la lame ayant pour effet d'échanger les faces intérieure et extérieure ne provoque pas un changement sensible du bombement. Nous attribuerons ce phénomène au fait que la déformation plastique locale subie par la lame dans son épaisseur est symétrique par rapport au plan médian.

4 Enfin, il est à remarquer que la stabilité de la lame est d'autant plus grande que le rayon de courbure transversale r_t est petit.

Divers essais d'explication de l'influence du Tensionnement ont été donnés. Comme nous le verrons, chacun pris séparément n'est pas entièrement satisfaisant.

112-2. Etude théorique du Tensionnage

Donc, lorsqu'une plaque mince, siège de contraintes internes dues au tensionnement, est fléchié fortement, il apparaît un bombement.

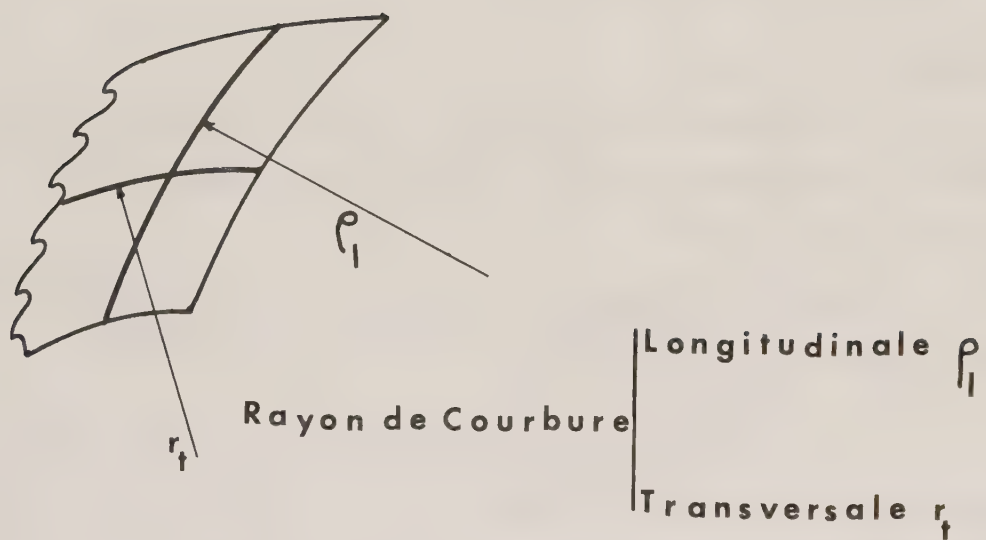


Figure 6

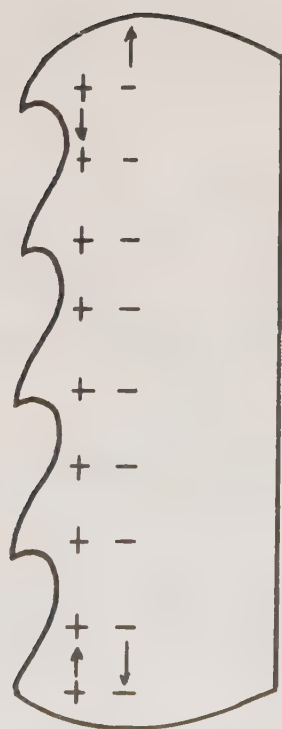


Figure 6'

Des travaux théoriques [12,13,14,32,33] ont permis de retrouver la relation mise en évidence expérimentalement entre les rayons de courbure longitudinale et transversale, ρ_1 et r_t^* (fig. 6) ainsi que l'existence d'un rayon critique ρ_{cr} .

Ces recherches ont conduit à la proposition d'une "normalisation" de ρ pour la mesure de r_t^* . En effet, il y avait une trop grande dispersion des résultats due à l'influence de l'affûteur. Aussi M. DOI a préconisé l'emploi d'un dispositif permettant de mesurer r_t^* en imposant ρ_1 successivement en chaque point du ruban.

Il a choisi pour valeur de ρ_1 celle du rayon des poulies bien que rien ne justifie apparemment ce choix sinon le fait qu'au Japon, toutes les scies industrielles soient normalisées en ce qui concerne le rayon des poulies (21 pouces).

112-3. Utilité du tensionnage

Il semble que le but principal du Tensionnage soit d'augmenter la rigidité de la ligne des dents à la Torsion [64] et à la flexion, afin d'effectuer un sciage droit. Cette augmentation est obtenue de deux façons :

- Tension interne due au Tensionnage.
- Accroissement de cette tension lorsque la lame bombée prend sa position définitive sur les volants puisque l'on a tendance à accroître la tension du bord de lame par diminution du bombement (fig. 6') ; (le bombement des rubans étant supérieur au bombé des volants).

La meilleure preuve de l'efficacité du Tensionnement vu sous cet angle est que ce dernier qui était réservé aux scies à ruban, est appliqué maintenant aux scies alternatives [23, 133].

Le Tensionnement peut être associé à certaines considérations énergétiques [1,2] : en effet, le préformage du feuillard d'acier diminue la puissance nécessaire à l'entraînement à vide d'une scie à ruban ; parallèlement, la diminution de la tension de montage du ruban sur les volants aboutit à une réduction énergétique. Or la courbure du dos du ruban, surtout lorsqu'elle est adjointe à un préformage conférant un Tensionnage fort et à une Tension de montage élevée, favorise évidemment la stabilité de l'outil au sciage mais crée des conditions opposées aux économies énergétiques espérées. Il en résulte que le préformage doit être très soigné et précis afin de réussir un compromis favorable entre stabilité et écono-

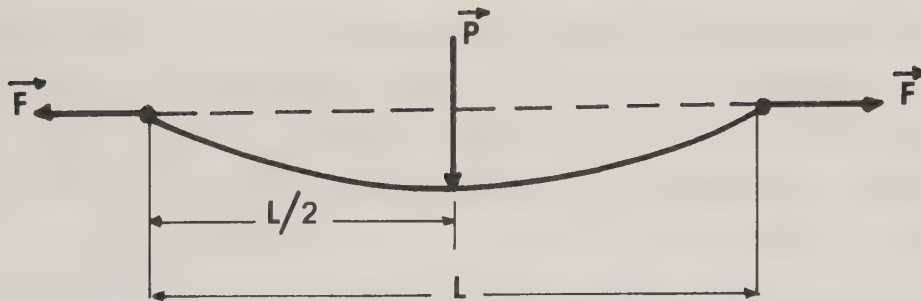


Figure 7

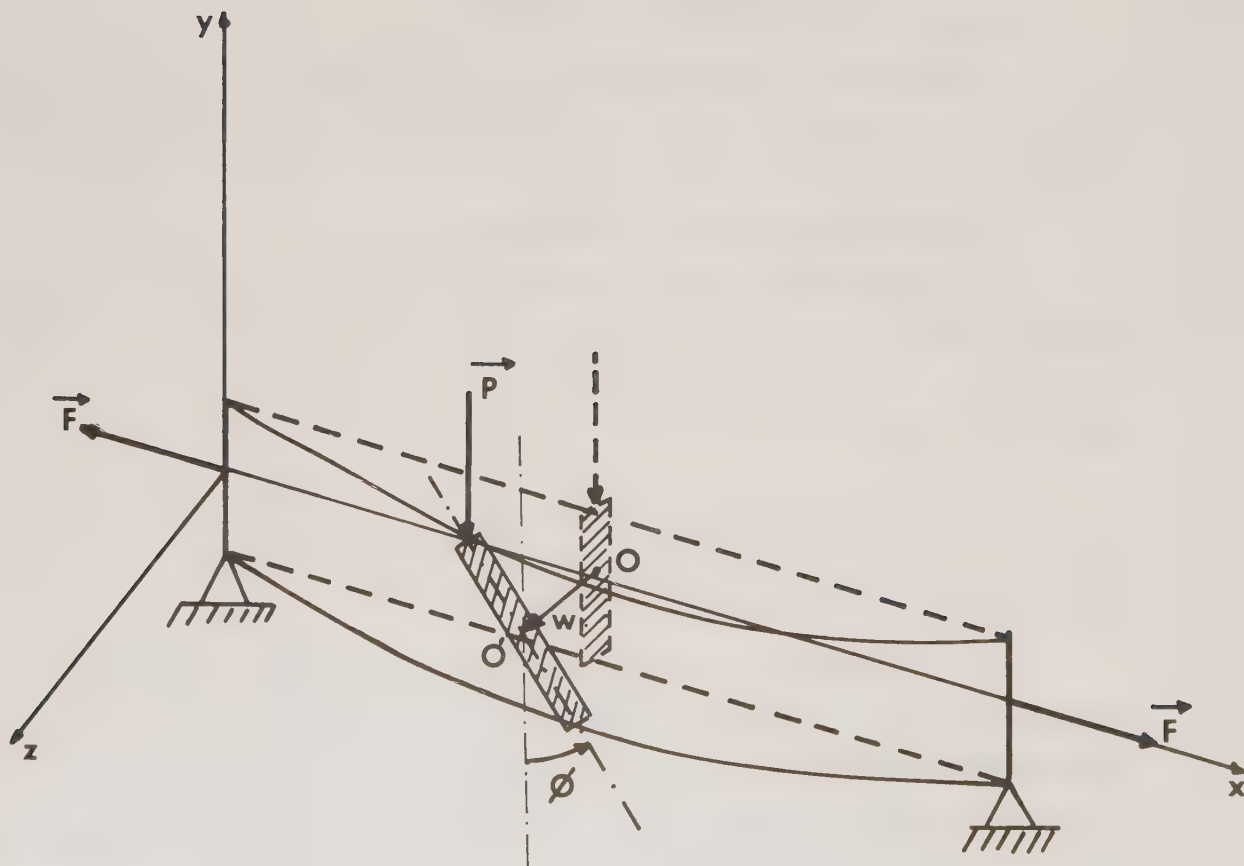


Figure 8

mie de puissance à vide.

D'autre part, des expériences ont montré [55] qu'une lame précontrainte par roulage voyait sa fréquence fondamentale de torsion augmenter alors que celle des vibrations transversales restait inchangée.

Il est possible de constater au vu de ce bref exposé qu'il reste encore beaucoup à faire pour appréhender totalement le problème du tensionnement et de son influence sur la stabilité de position des lames.

I.12. STABILITE DE LA LAME A LA DEFORMATION

Dans d'autres travaux, on attache un intérêt particulier à la précision du sciage [92,119] , et par conséquent, c'est la rigidité de la lame aux déformations qui est particulièrement préoccupante [89,90,91,118] . On suppose dans ces études que la lame est stable en position sur les volants et l'on ne s'occupe que de la rigidité statique sans tenir compte des contraintes internes initiales.

Le besoin de ces études est apparu avec la venue sur le marché de lames américaines plus minces donc plus sensibles aux déplacements latéraux (fig. 7) dus à la flexion et angulaires dus à la torsion (fig. 8).

Comme on pouvait le prévoir, la solution préconisée [20,44,96] est d'augmenter la tension initiale des lames. En revanche, il est intéressant de noter que l'augmentation de rigidité n'est peut-être pas directement proportionnelle à l'augmentation de tension [38, 44] . Il est possible en effet d'augmenter la tension sans changer

la fatigue de la lame dans la mesure où la diminution de contrainte de flexion au niveau des poulies est compensée par l'augmentation de tension.

On met aussi en évidence l'existence d'une charge critique liée à la vitesse d'avance et provoquant un voilement latéral [44,96,91,92,118, 119,120,121] . Le point d'application de la force provoquant le flambage fait l'objet de diverses hypothèses : force dans le plan de la lame pour les deux premières études, située en bout des dents (donc en dehors du plan de la lame à cause de l'avoyage) pour les deux suivantes. Les derniers travaux cités montrent le peu d'influence de cette vitesse d'avance tant que l'on n'atteint pas la vitesse critique.

Remarquons que toutes ces études de stabilité sont essentiellement des études statiques, c'est-à-dire que l'on néglige l'influence éventuelle de la vitesse de défilement de la lame, les variations temporelles des efforts de chargement et les phénomènes de vibrations.

I.2. RESULTATS CONCERNANT LES VIBRATIONS DES FILS FLEXIBLES, COURROIES ET RUBANS ENTRAÎNÉS

Notons que tous les travaux auxquels nous ferons référence ne font que reprendre les études théoriques quasi-exhaustives de Jules Haag [46] consacrées à la théorie des fils élastiques.

Les études vibratoires citées en référence concernent :

- . les flexibles rotatifs [46]
- . le bobinage des fils à grande vitesse [15,25,82,100,114]
- le défilement des bandes de magnétophones [68] , des chaînes [54]
- et des courroies de transmission [34, 62]
- . et les lames de scie à ruban [69,70,78,84] .

Les techniques classiques de type analytique ou numérique (discretisation simple ou par éléments finis du modèle) ont été utilisées pour résoudre et discuter le problème de la vibration transversale d'un ruban ne présentant pas de raideur à la flexion, c'est-à-dire pour lequel $J \approx 0$ [9,34,45,75,101]. Les réponses en vibrations libres et forcées ont été déterminées ; elles correspondent à des problèmes linéaires ou non suivant la complexité du problème initial envisagé [62,74,79,98,100,114] , certains auteurs prenant même en considération un amortissement linéaire proportionnel à la vitesse absolue ou relative du déplacement transversal [65,100] . L'auteur cité en référence [54] indique que c'est le premier type d'amortissement qui donne les résultats théoriques les plus proches des résultats expérimentaux.

Dans tous les cas, les auteurs concluent à la stabilité des vibrations, la notion de stabilité devant être prise cette fois au sens habituel des petits mouvements.

Le cas des vibrations faisant intervenir la raideur de flexion des rubans n'a été abordé que numériquement [25,69,70,78,84]. Les auteurs [78] vont même jusqu'à considérer le ruban comme une plaque large.

Que peut-on conclure de tous ces travaux ? Il apparaît que :

. en première approximation, il est possible d'assimiler les rubans à des fils sans raideur.

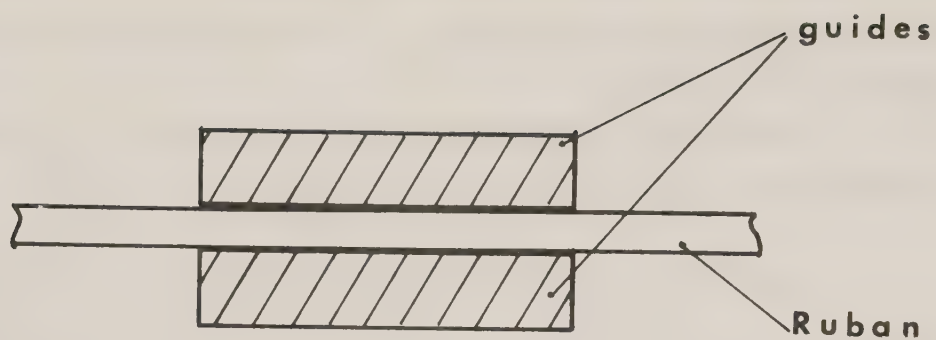
. aucune étude fondamentale sur la stabilité en tenant compte des liaisons avec le repère fixe n'a été semble-t-il entreprise.

Citons enfin quelques travaux consacrés aux vibrations de Torsion [8,110] et à l'influence du couplage flexion-torsion dû, par exemple, au voilement provoqué par l'application de charges sur le bord du ruban [72, 73] .

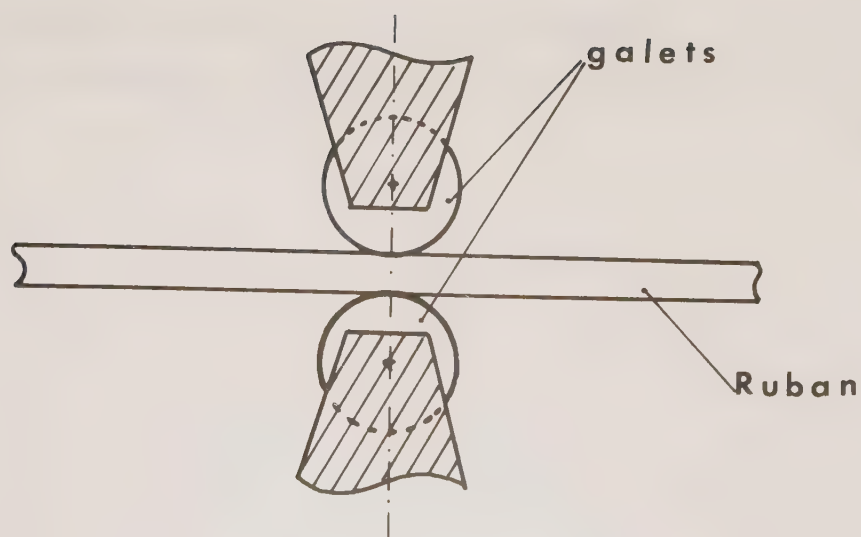
Au vu de l'analyse bibliographique qui vient d'être faite, on constate que trois directions de recherches se dessinent :

- Influence du Tensionnement sur le comportement du ruban.
- Influence de la raideur de flexion sur le comportement des rubans et leur stabilité.
- Effet du couplage : ruban-bâti.

Le travail présenté ici ne concernera que les deux derniers points en vue d'une amélioration de la connaissance du comportement des scies à rubans.



1 _ Encastrement



2 _ Articulation

CHAPITRE II

Etude de la lame de scie à ruban considérée comme un fil

Nous considérons, dans ce chapitre, que le fil possède une raideur à la flexion en plus de son élasticité longitudinale.

Précisons également les conditions aux limites que nous choisirons aussi proches que possible de la réalité, tout en restant mathématiquement simples : le ruban entraîné en translation repose sur deux guides sans frottement. Suivant la dimension de ces guides (fig. 9), on considèrera le ruban comme "encastré" ou "articulé". Les conditions aux limites se traduisent sur le déplacement transversal $v(x,t)$ par :

- encastrement :

déplacement et pente nuls aux extrémités :

$$\left| \begin{array}{l} v(0,t) = v(1,t) = 0 \\ v_{,x}(0,t) = v_{,x}(1,t) = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

- articulation ou support simple :

déplacement et moment fléchissant nul aux extrémités :

$$\left| \begin{array}{l} v(0,t) = v(1,t) = 0 \\ v_{,xx}(0,t) = v_{,xx}(1,t) = 0 \end{array} \right. \quad (2)$$

Nous verrons que ces deux types de conditions aux limites ne provoquent pas de différences sensibles.

Enfin, seules les vibrations transversales sont prises en considération (fig. 10).

I. Hypothèses utilisées.

- 1 Ruban à une dimension (sans largeur)
- 2 vitesse de translation et masse volumique constantes
- 3 Accélération de la pesanteur négligée
- 4 Amortissement structural et externe négligés

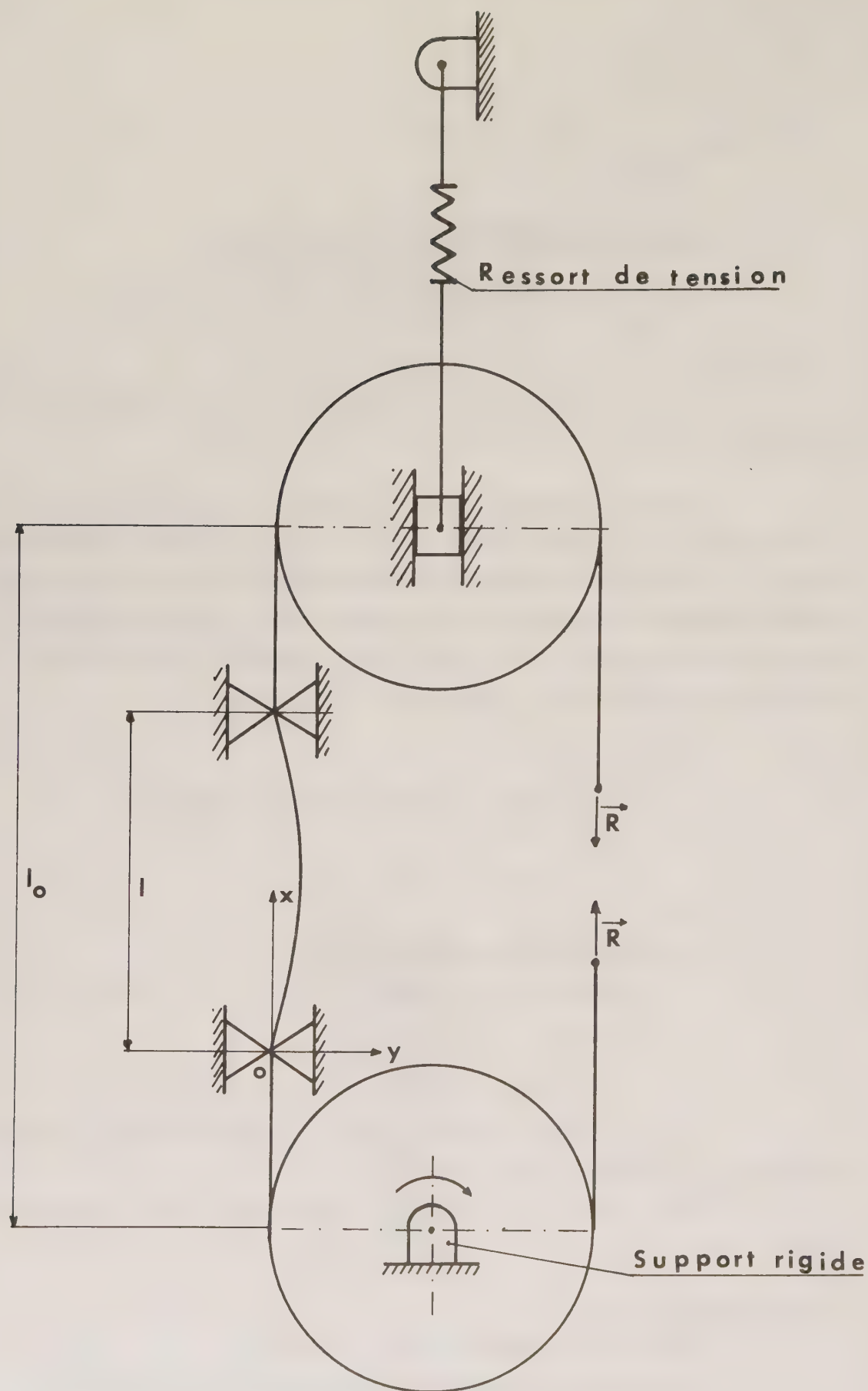
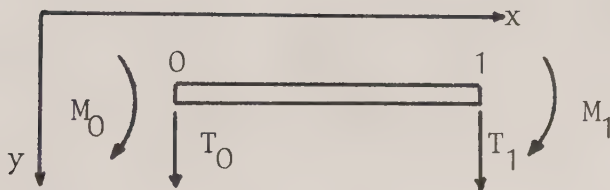
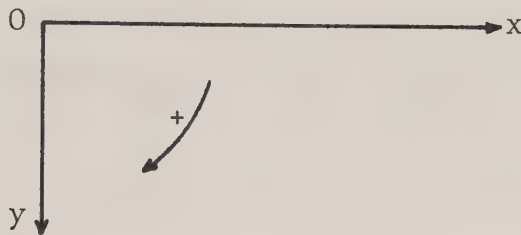


Figure 10

- 5 Tension constante en tout point du fil
- 6 Oscillations petites
- 7 Le vecteur déplacement n'a qu'une composante suivant Oy.

II. Mise en équation.

La mise en équation du problème est faite suivant la méthode classique en écrivant les équations d'équilibre d'un tronçon de poutre ; en respectant les conventions suivantes, habituellement utilisées en dynamique des structures :



$$\begin{cases} EJ y''_1 = M_1 \\ EJ y'''_1 = - T_1 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} EJ y''_0 = - M_0 \\ EJ y'''_0 = + T_0 \end{cases} \quad (4)$$

Le repère (Ox, Oy) de la figure (10) est fixe et le déplacement transversal en un point de cote x est une fonction de l'abscisse x et du temps t :

$$v = f(x, t) \quad (5)$$

Les efforts en place indiquent l'action du milieu extérieur sur l'élément considéré.

II.1. Equations d'équilibre

L'équation du tronçon (fig. 11) s'écrit alors :

211. Equilibre des forces en projection sur l'axe Oy.

$$+ (T + dT) \cos \theta - T \cos \theta = \rho S dx \frac{d^2 v}{dt^2}$$

θ étant petit, $\cos \theta$ est égal environ à 1 ; le calcul de l'accélération est effectué en tenant compte de la vitesse de translation $\vec{c}$ du ruban :

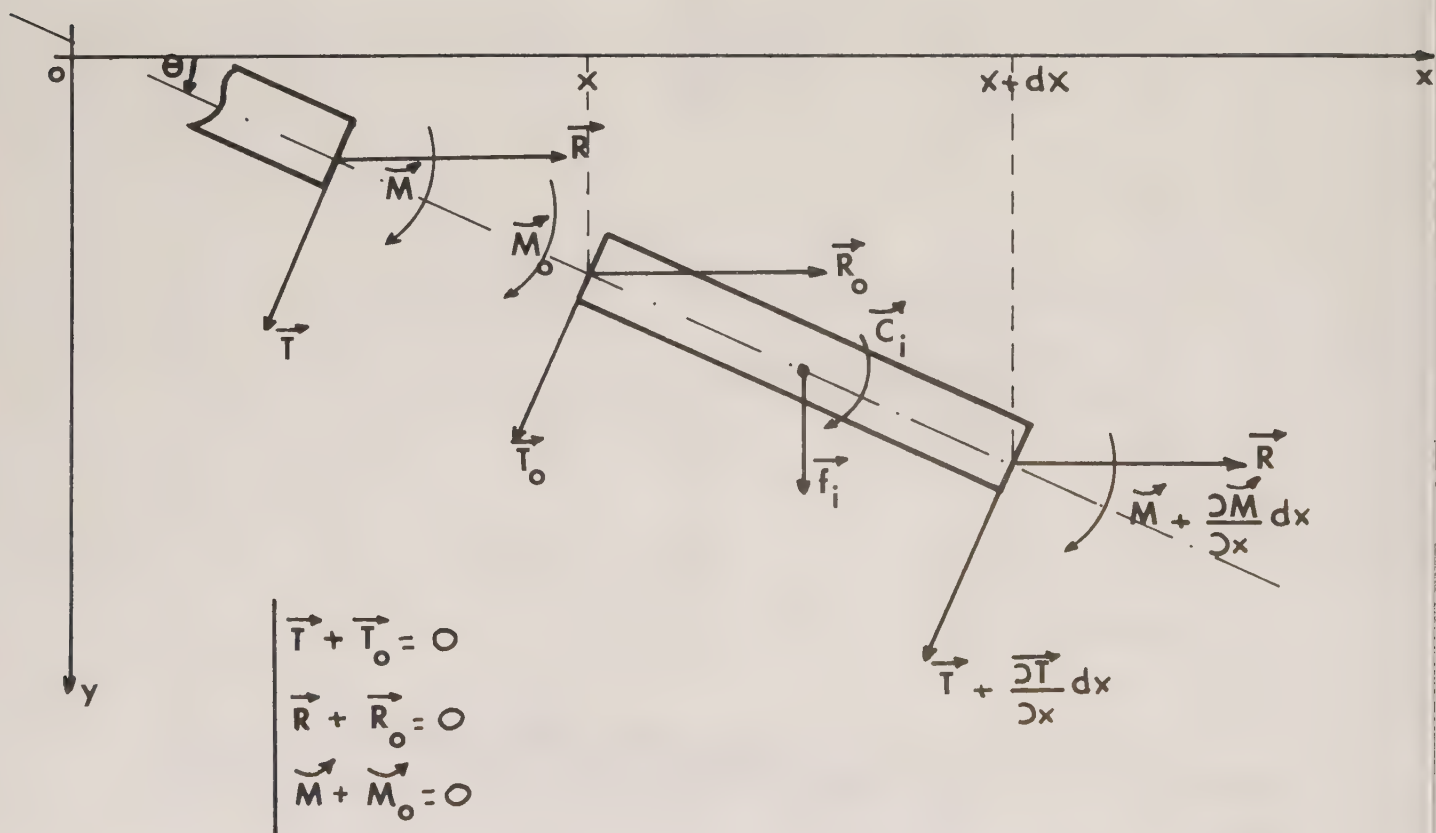


Figure II

$$\frac{d}{dt} v = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + c \frac{\partial v}{\partial x}$$

et
$$\frac{d^2 v}{dt^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2c \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

L'équation traduisant l'équilibre des forces est la suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \rho S c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \rho S c \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (6)$$

212. Equilibre des moments en G

$$(M + \frac{\partial M}{\partial x} dx) - M + (T + \frac{\partial T}{\partial x} dx) \cdot \frac{dx}{2} + T \frac{dx}{2} - R \theta dx = I \ddot{\theta}$$

en négligeant les termes du second ordre (en dx^2) devant ceux du premier (en dx) :

$$\frac{\partial M}{\partial x} dx + T dx - R \frac{\partial v}{\partial x} dx - I \ddot{\theta} = 0$$

Pour un élément de poutre de longueur dx , il existe la relation suivante entre le moment d'inertie par rapport à l'axe neutre et le moment quadratique correspondant :

$$I = J \rho dx$$

d'où:

$$T = - \frac{\partial M}{\partial x} + R \frac{\partial v}{\partial x} + J \rho \ddot{\theta}$$

et par conséquent :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = - \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + R \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + J \rho \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x} \quad (7)$$

or
$$\frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial t^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] = \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} \quad (8)$$

En écrivant l'égalité des équations 6 et 7 et en tenant compte des relations 3 et 8, nous obtenons l'équation du mouvement vibratoire :

$$(9) \quad \left| \frac{EJ}{\mu} \cdot \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} (c^2 - \frac{R}{\mu}) - \frac{J\rho}{\mu} \cdot \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} + 2c \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \right.$$

avec $\mu = \rho S$.

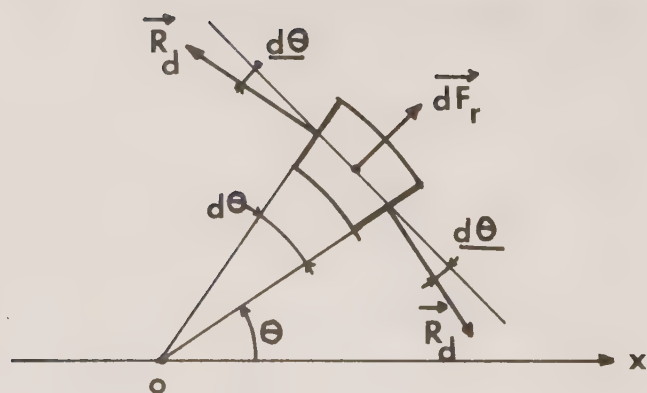
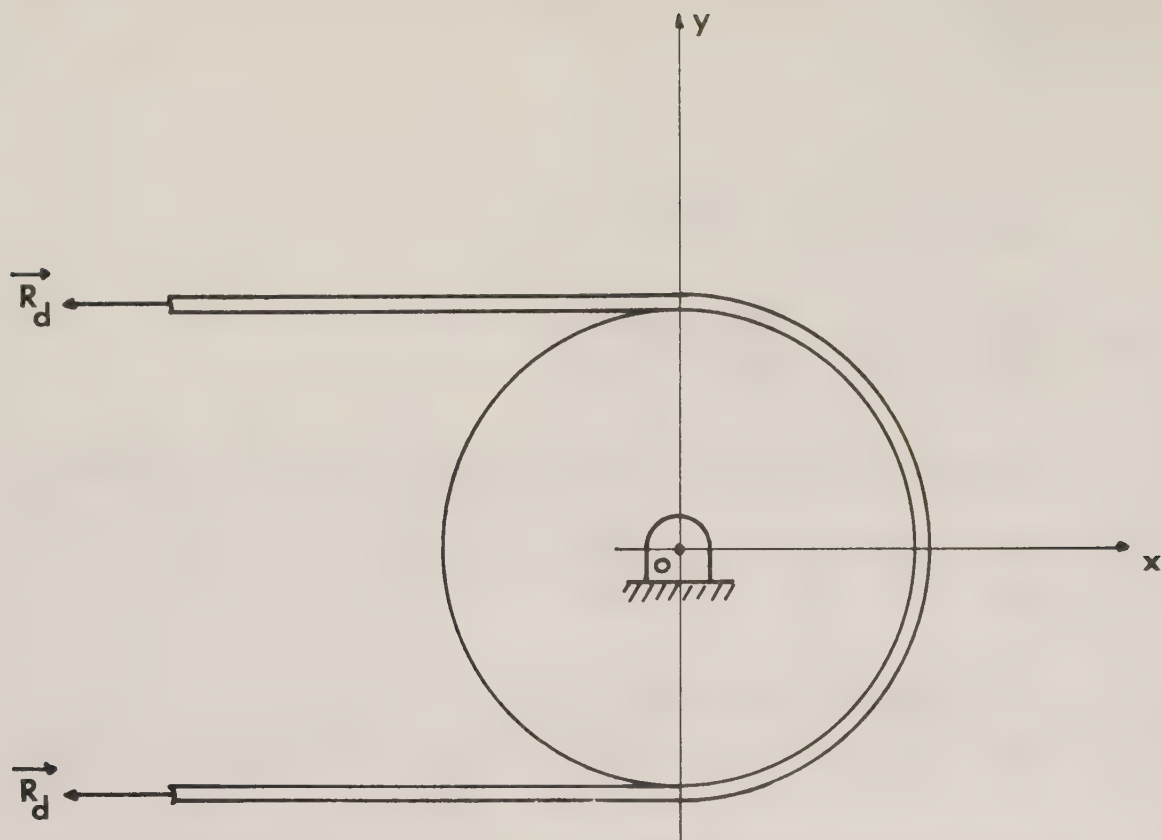


Figure 12

213. Tension dynamique

La partie du ruban qui coïncide avec les poulies et qui suit par conséquent une trajectoire circulaire, est donc soumise à une accélération normale, la vitesse de défilement étant constante. Il est clair que les forces d'inertie dues à cette accélération contribuent à augmenter la tension existant dans les brins.

Nous allons déterminer quelle est la correction à apporter à la tension statique R_s , la tension dynamique étant R_d :

$$R = R_s + \eta R_d \quad (10).$$

Etudions (fig. 12) l'équilibre d'un élément de ruban, en ne prenant en considération que la composante dynamique de la tension

$$dF_r = 2 R_d \sin \left(\frac{d\theta}{2} \right)$$

$$\text{or} \quad dF_r = dm \Omega^2 r = (\mu r d\theta) \Omega^2 r = \mu c^2 d\theta$$

d'où

$$2 R_d \sin \left(\frac{d\theta}{2} \right) = \mu c^2 d\theta$$

$$R_d = \mu c^2 \quad (11)$$

Cette composante dynamique de la tension existe toujours indépendamment de la tension initiale.

Calcul du coefficient de correction η :

$$\text{Posons } F_1 = \eta R_d$$

F_1 représente la variation dynamique de la tension dans un brin.

Schématisons la machine (fig. 13) : il y a deux brins ayant chacun une raideur $k_R = \frac{ES}{l}$ et un bâti de raideur k_s ; étant donné la symétrie, nous pouvons travailler sur la moitié du système ($\frac{1}{2} k_s$ pour le bâti et k_R pour un brin).

Lorsque la machine démarre, il apparaît une force précédemment calculée μc^2 qui est donc appliquée aux deux ressorts en parallèle de raideur respective $\frac{1}{2} k_s$ et k_R ; la raideur équivalente de ces deux ressorts est donc :

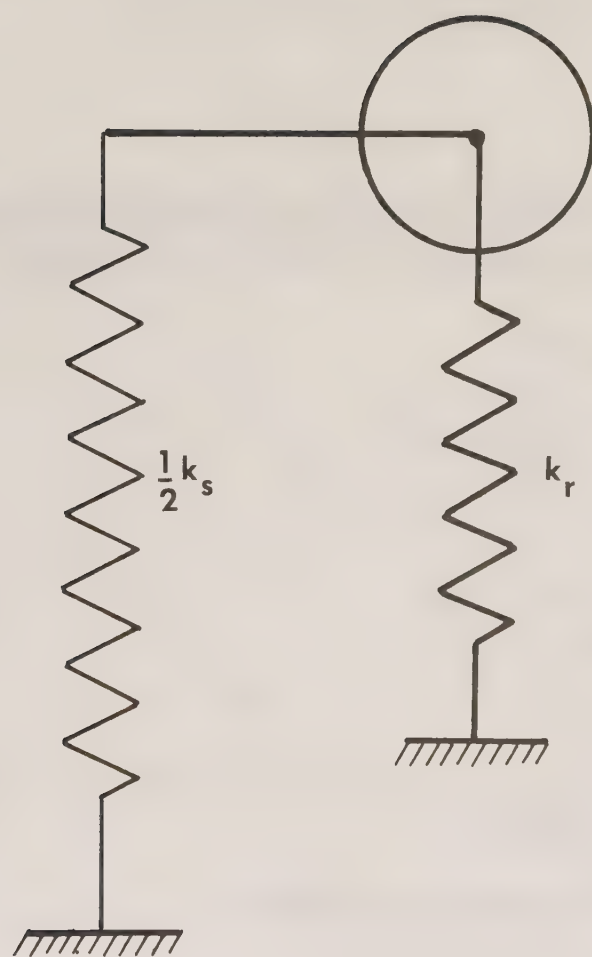


Figure 13

$$K = \frac{1}{2} k_s + k_R \quad \text{Soit} \quad K = \frac{1}{2} k_s + \frac{ES}{1} \quad (12)$$

La poulie subit donc un déplacement δ_1 , tel que :

$$\mu c^2 = K \delta_1 \quad (13)$$

Or cette force $\vec{F}$ d'intensité égale à μc^2 est la résultante de deux forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ agissant respectivement sur le ruban et sur le bâti.

$$F_1 \text{ a pour expression : } k_R \delta_1 \quad \text{soit} \quad \frac{ES}{1} \delta_1 \quad (14)$$

En tenant compte des relations 12 et 13 :

$$F_1 = \frac{ES}{1} \cdot \frac{\mu c^2}{K} = \frac{\mu c^2}{1 + k_s \frac{1}{2ES}}$$

d'où :

$$F_1 = \eta \mu c^2 \quad \text{avec} \quad \eta = \frac{1}{1 + k_s \frac{1}{2ES}} \quad (15)$$

deux cas extrêmes :

- quand la rigidité du bâti est infinie, $k_s = \infty$, $\eta = 0$
- quand la rigidité du bâti est nulle, $k_s = 0$, $\eta = 1$

$$\text{d'où : } 0 < \eta < 1 \quad (16)$$

quand le ruban est en mouvement, sa tension est donc :

$$R = R_s + \eta \mu c^2 \quad (17)$$

214. Equation corrigée du mouvement vibratoire

L'équation 9 est modifiée en prenant en considération la relation 17 et en effectuant la transformation suivante :

$$\chi = 1 - \eta \quad \text{avec} \quad 0 < \chi < 1$$

$$(18-1) \quad \left| \frac{EJ}{\mu} \cdot \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \left(\chi c^2 - \frac{R_s}{\mu} \right) - \frac{J\rho}{\mu} \cdot \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} + 2c \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \right.$$

CARACTERISTIQUES DE LA SCIE ETUDIEE

(modèle 1800)

Diamètre des volants	mm	1800
Longueur de la lame	m	11,35
Largeur de la lame (2 sens de sciage)	mm	311
Epaisseur de la lame	mm	1,8
Masse linéaire de la lame	kg/m	3,4
Tension maximale	N	150000
Rotation des volants	tr/mn	480
Vitesse de coupe	m/s	45

χ	ε	α
1	$-3,296 \cdot 10^{-4}$	$-4,883 \cdot 10^{-5}$
0,5	$-3,141 \cdot 10^{-4}$	$-4,653 \cdot 10^{-5}$
0	$-2,999 \cdot 10^{-4}$	$-4,444 \cdot 10^{-5}$

Voir en annexe I le tableau complet donnant ε et α pour différents modèles.

$$(18-2) \left| EJ \cdot \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} (\chi \mu c^2 - R_S) - J\rho \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} + 2c\mu \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \right.$$

En fait, nous négligerons le 3ème terme ; son influence est petite, mais beaucoup plus importante d'après Rayleigh pour les hautes fréquences de vibrations ; nous obtenons alors l'équation suivante :

$$(19-1) \left| EJ \cdot \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + (\chi \mu c^2 - R_S) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2c\mu \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \right.$$

Nous travaillerons également avec une autre équation transformée :

$$(19-2) \left| \varepsilon v_{,xxxx} + v_{,xx} + 2c\alpha v_{,xt} + \alpha v_{,tt} = 0 \right.$$

avec les notations suivantes :

$$\varepsilon = \frac{EJ}{\chi \mu c^2 - R_S} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{\mu}{\chi \mu c^2 - R_S}$$

Compte-tenu des réalisations industrielles, les coefficients ci-dessus seront donnés dans le tableau (19-3).

215. Remarque :

Dans certaines publications [15] , [69] , [78] , la mise en équation est effectuée en utilisant le principe de Hamilton : l'intégrale entre deux temps t_1 et t_2 de la fonction de Lagrange ($\mathcal{L} = E_c - E_p$) possède un extremum :

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = 0$$

Mais il semble bien que l'application de ce principe au cas du solide déformable en translation ne soit pas correcte, car la particule de matière intervenant dans les conditions aux limites aux temps t_1 et t_2 n'est pas la même [II] , [IV] , [VI] .

III. Etude de l'équation du mouvement

Dans ce paragraphe, nous recherchons les valeurs propres et les déformées propres du ruban en régime harmonique.



III.1. Représentation de la fonction inconnue par la méthode de Galerkin-Bubnov [27], [51] :

Il y a 3 possibilités d'application de cette méthode :

. Développer la fonction inconnue $Y(x)$ sur une suite complète [IX] [52] de fonctions satisfaisant aux conditions aux limites (ou fonctions de comparaison), et si possible orthogonales entre elles.

. Développer la fonction inconnue $Y(x)$ à l'aide de fonctions vérifiant les équations différentielles identiquement mais non les conditions aux contours.

. Développer la fonction cherchée à l'aide de fonctions géométriquement admissibles ne satisfaisant ni aux conditions aux limites, ni aux équations différentielles.

La substitution de la fonction approchée dans les équations conduit à un "résidu" ou "vecteur d'erreur" e qui doit être le plus petit possible. Diverses possibilités de résolution s'offrent alors : la méthode de Galerkin consiste à annuler les projections orthogonales du résidu sur les vecteurs ou fonctions de base. Pour préciser, soit une équation aux dérivées partielles :

$$L [Y(x)] = f(x)$$

munie de conditions aux limites : $T(Y) = q$.

Soit $V_n(x)$ l'ensemble des fonctions choisies pour le développement et

$\hat{Y}(x) = \sum_{n=1}^N a_n V_n(x)$ la solution approchée obtenue en limitant le développement à l'ordre N .

En la reportant dans l'équation de départ, il vient :

$$L(\hat{Y}) - f = e$$

$$L \left[\sum_{n=1}^N a_n V_n(x) \right] - f(x) = e(x)$$

Si les fonctions sont réelles, la projection orthogonale de $e(x)$ s'écrit :



$$\int_0^L \left[L \left[\sum_{n=1}^N a_n V_n(x) \right] \right] \cdot V_r(x) dx - \int_0^L f(x) \cdot V_r(x) dx = \int_0^L e(x) \cdot V_r(x) dx$$

en imposant $\int_0^L e(x) \cdot V_r(x) dx = 0 \quad \forall r \quad (20)$

Remarque :

Si L est linéaire, le système d'équations obtenu est linéaire en a_n . Ce sont les coefficients de Fourier généralisés de Y relativement à la suite de fonctions orthogonales. La convergence des solutions est difficile à étudier.

311. Allure de la courbe représentant la variation de la valeur propre fondamentale en fonction de la vitesse de défilement :
 $\underline{s} = \underline{g}(\underline{c})$.

Nous procéderons de la manière suivante :

. dans un premier temps, nous nous intéresserons au comportement de la lame, lorsque la vitesse de défilement est quasi-nulle, ce qui correspond au cas d'une poutre non-entraînée.

. dans un deuxième temps, nous nous placerons au voisinage de la vitesse critique, c'est-à-dire de la vitesse pour laquelle la valeur propre correspondante tend vers zéro. Ce phénomène est connu expérimentalement ; nous allons en donner une analogie.

L'équation (19-1) se réduit dans ce cas à :

$$(\chi \mu c^2 - R_s) \frac{d^2 v}{dx^2} + EJ \frac{d^4 v}{dx^4} = 0 \quad (19-1 \text{ bis})$$

Posons $P = \chi \mu c^2 - R_s$, l'équation ci-dessus est analogue à un problème de flambage en considérant la variable $d^2 v / dx^2$. Les vitesses critiques correspondent donc à une disparition de la raideur apparente des lames.

Nous savons que pour une poutre les valeurs propres sont purement imaginaires et nous admettrons que la perturbation due à une petite vitesse de défilement ne change pas ce résultat.



Nous pouvons écrire que la solution de l'équation (19-1) est de la forme :

$$(21) \quad v(x,t) = V(x) e^{j\omega t} \quad (21-1), \quad V(x) = \sum_{n=1}^N a_n \sin \frac{n\pi}{l} x = \sum_{n=1}^N V_n(x) \quad (21-2)$$

Les équations (19-1) et (21) conduisent à l'équation :

$$L [v(x,t)] = e(x)$$

soit :

$$EJ \frac{\partial^4 V(x)}{\partial x^4} + (\chi \mu c^2 - R_s) \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} + 2j c \mu \omega \frac{\partial V(x)}{\partial x} - \mu \omega^2 V(x) = e(x)$$

En tenant compte des relations (20) et (21), cette équation prendra la forme :

$$\sum_{r=1}^N \left\{ \int_0^l \left[\sum_{n=1}^N EJ \frac{\partial^4 V_n(x)}{\partial x^4} + (\chi \mu c^2 - R_s) \frac{\partial^2 V_n(x)}{\partial x^2} + 2j c \mu \omega \frac{\partial V_n(x)}{\partial x} - \mu \omega^2 V_n(x) \right] \cdot V_r(x) \cdot dx \right\} = 0$$

En regroupant les termes d'une certaine manière, nous aurons enfin :

$$\begin{aligned} EJ \int_0^l \left[\sum_{v=1}^N V_v(x) \right] \cdot \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left[\sum_{v=1}^N V_v(x) \right] \cdot dx + (\chi \mu c^2 - R_s) \cdot \\ \int_0^l \left[\sum_{v=1}^N V_v(x) \right] \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\sum_{v=1}^N V_v(x) \right] \cdot dx + 2j c \mu \omega \int_0^l \left[\sum_{v=1}^N V_v(x) \right] \cdot \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_{v=1}^N V_v(x) \right] \cdot dx - \mu \omega^2 \int_0^l \left[\sum_{v=1}^N V_v(x) \right]^2 \cdot dx = 0 \end{aligned}$$

ce qui s'écrit simplement :

$$(22) \quad \left| \begin{aligned} EJ \int_0^l V(x) \cdot \frac{\partial^4}{\partial x^4} (V(x)) \cdot dx + (\chi \mu c^2 - R_s) \int_0^l V(x) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} V(x) \cdot dx \\ + 2j c \mu \omega \int_0^l V(x) \cdot \frac{\partial V(x)}{\partial x} \cdot dx - \mu \omega^2 \int_0^l (V(x))^2 \cdot dx = 0. \end{aligned} \right.$$



Compte-tenu des fonctions choisies pour $V_n(x)$ et des relations suivantes :

$$(23) \left\{ \begin{array}{l} (23-1) \int_0^1 \sin\left(\frac{n\pi}{1} x\right) \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{1} x\right) dx = \left\{ \begin{array}{l} 1/2 \text{ pour } n = k \\ 0 \text{ pour } n \neq k \end{array} \right. \\ (23-2) \int_0^1 \sin\left(\frac{k\pi}{1} x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{1} x\right) dx = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ pour } n = k \\ -\frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{k+n} \cos(k+n)\pi + \frac{1}{k-n} \cos(k-n)\pi - \frac{1}{k+n} - \frac{1}{k-n} \right] = \\ -\frac{1}{2\pi} \left[\frac{(-1)^{k+n}-1}{k+n} + \frac{(-1)^{k-n}-1}{k-n} \right] \\ \text{pour } k \neq n \end{array} \right. \end{array} \right.$$

nous constatons que :

$$\int_0^1 V(x) \cdot \frac{\partial^4}{\partial x^4} [V(x)] \cdot dx \quad \text{est} > 0 \quad (23-3)$$

$$\int_0^1 V(x) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} [V(x)] \cdot dx \quad \text{est} < 0 \quad (23-4)$$

$$\int_0^1 V(x) \cdot \frac{\partial V(x)}{\partial x} \cdot dx \quad \text{est} = 0 \quad (23-5)$$

$$\int_0^1 [V(x)]^2 dx \quad \text{est} > 0 \quad (23-6)$$

et l'équation (22) se réduit à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{EJ} \int_0^1 V(x) \cdot \frac{\partial^4 V(x)}{\partial x^4} dx + (\chi \mu c^2 - R_S) \int_0^1 V(x) \cdot \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} dx - \mu \omega^2 \int_0^1 [V(x)]^2 dx = 0 \end{array} \right. \quad (24)$$



3111. Etude dans le cas d'une vitesse de défilement quasi-nulle

Mettons ω sous la forme :

$$\omega = \omega_0 + \left(\frac{c}{c_0}\right) \omega_1 + \left(\frac{c}{c_0}\right)^2 \omega_2 + \dots \quad (25)$$

Dans l'équation (24), remplaçons ω par son expression (25) :

. Terme indépendant de la vitesse :

$$EJ \int_0^1 V(x) \cdot \frac{\partial^4 V(x)}{\partial x^4} dx - R_s \int_0^1 V(x) \cdot \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} dx - \mu \omega_0^2 \int_0^1 [V(x)]^2 dx = 0$$

Cette équation n'est autre que l'équation d'une lame soumise à un effort de traction, étudiée par la méthode de Galerkin ; pour un tel problème, nous connaissons la valeur propre qui est :

$$\omega_0 = \frac{\pi}{1} \left[\left(\frac{\pi}{1}\right)^2 \frac{EJ}{\mu} + \frac{R_s}{\mu} \right]^{1/2} \quad [\text{VII}]$$

. Coefficient de c :

$$- 2 \mu \frac{\omega_0}{c_0} \omega_1 \int_0^1 V(x) \cdot \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} dx = 0 \quad \text{soit } \omega_1 = 0$$

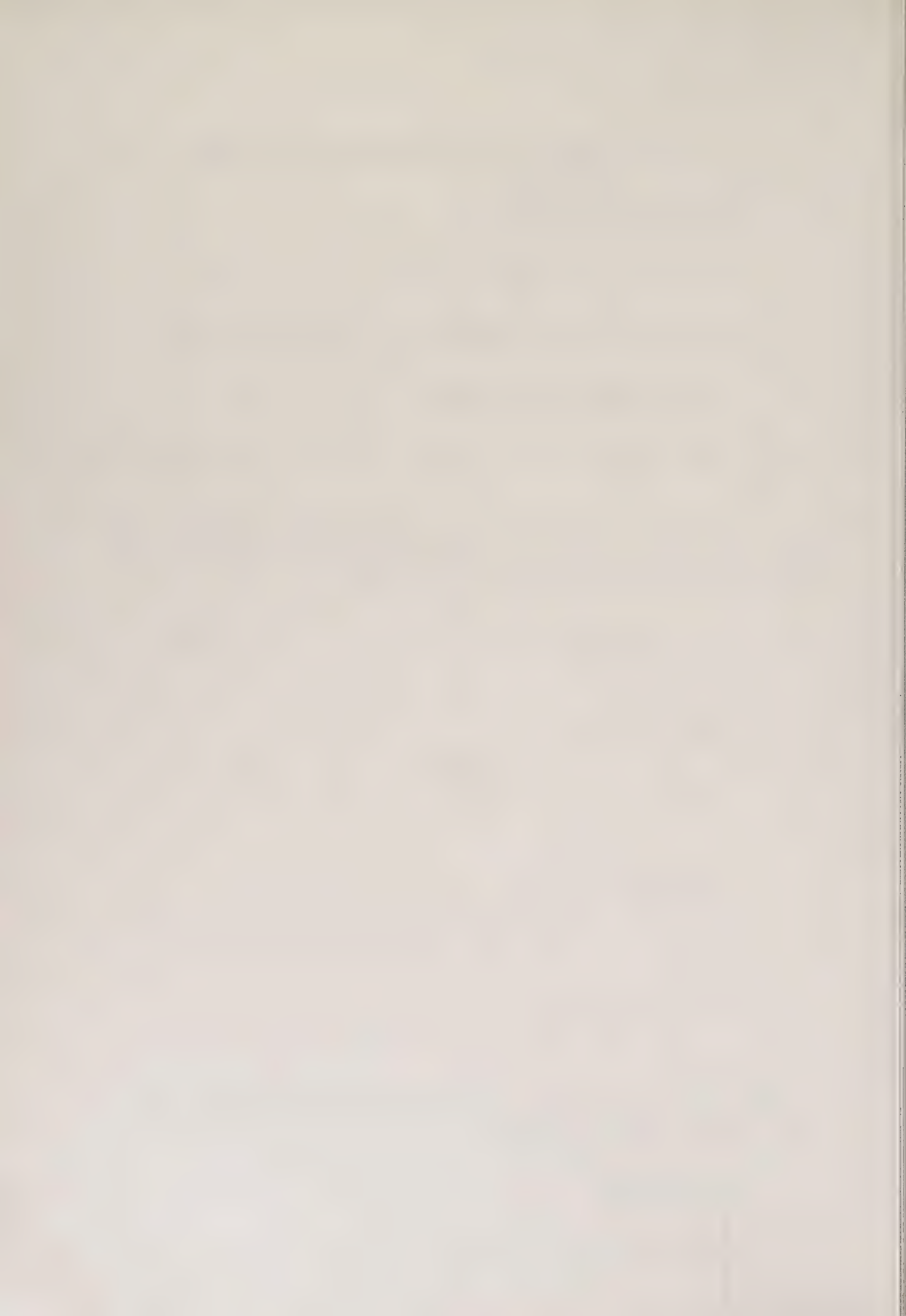
. Coefficient de c^2 :

$$\chi \mu \int_0^1 V(x) \cdot \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} dx - 2 \mu \omega_2 \omega_0 \int_0^1 [V(x)]^2 dx - \mu \omega_1^2 \int_0^1 [V(x)]^2 dx = 0$$

ω_1 étant nulle, les relations (23-6) et (23-4) nous permettent de voir que ω_2 est une quantité négative.

Par conséquent :

$$\left| \begin{array}{l} \omega = \omega_0 + \left(\frac{c}{c_0}\right) \omega_1 + \left(\frac{c}{c_0}\right)^2 \omega_2 + \dots \end{array} \right.$$



$$\left| \begin{array}{ll} \omega_1 = 0 & \rightarrow \text{pente nulle} \\ \omega_2 < 0 & \rightarrow \text{maximum} \end{array} \right.$$



3112. Etude au voisinage de $\omega = 0$

Dans ce cas : $c = c_0 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) c_1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 c_2 + \dots$ (25-bis)

dans l'équation (24), remplaçons c par son expression (25-bis) :

. Terme indépendant de ω :

$$EJ \int_0^1 V(x) \frac{\partial^4 V(x)}{\partial x^4} dx + \chi \mu c_0^2 \int_0^1 V(x) \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} dx - R_s \int_0^1 V(x) \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} dx = 0$$

Cette équation correspond à l'étude de l'équation (19-1 bis) ; les vitesses critiques ont pour expression [20] :

$$c_0 = \left[\frac{R_s + EJ \pi^2 m^2 / l^2}{\chi \mu} \right]^{1/2}$$

. Coefficient de ω :

$$2 \chi \mu \frac{c_1 c_0}{\omega_0} \int_0^1 V(x) \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} dx = 0 \quad \text{soit } c_1 = 0$$

. Coefficient de ω^2 : c_1 étant nul.

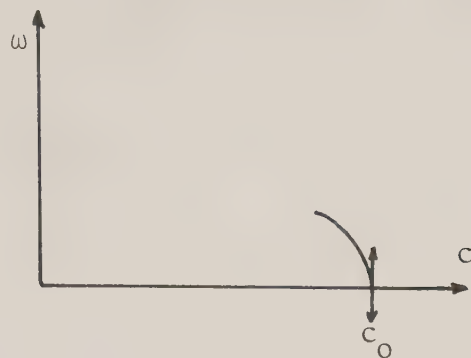
$$\chi \mu \frac{c_2 c_0}{\omega_0^2} \int_0^1 V(x) \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} - \mu \int_0^1 [V(x)]^2 dx = 0$$

En tenant compte de (23-4) et (23-6), nous pouvons en déduire que c_2 est une quantité négative. Dans ces conditions :

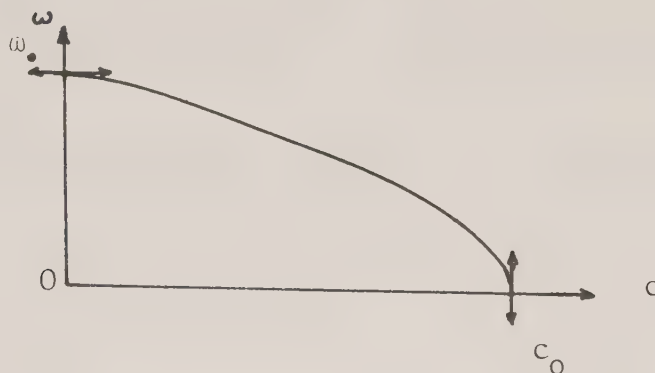
$$\left| c_0 = \left[\frac{R_s + EJ \pi^2 m^2 / l^2}{\chi \mu} \right]^{1/2} \right.$$

$c_1 = 0$: tangente verticale

$c_2 < 0$: courbure négative



d'où l'allure probable de la courbe : $\omega = g(c)$



Nous aurons probablement une pulsation réelle dans le domaine :

$$0 < c < c_0.$$

312. Application de la méthode de Galerkin généralisée :

Ecrivons la solution de (19-1) sous la forme :

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^N b_n(t) \sin n \frac{\pi}{1} x$$

où les coefficients dépendent du temps.

Nous obtenons avec les équations (20), pour r compris entre 1 et N :

$$\left[M \right] \leftarrow m_{nr} = \mu \int_0^1 \sum_{n=1}^N \sin \left(\frac{n\pi}{1} x \right) \sin \left(\frac{r\pi}{1} x \right) dx$$

$$\begin{aligned} [G] \leftarrow g_{nr} &= 2 c \mu \left(\frac{n\pi}{1} \right) \int_0^1 \sum_{n=1}^N \cos \left(\frac{n\pi}{1} x \right) \sin \left(\frac{r\pi}{1} x \right) dx \\ [K] \leftarrow k_{nr} &= (EJ \left(\frac{n\pi}{1} \right)^4 - (\chi \mu c^2 - R_s) \left(\frac{n\pi}{1} \right)^2) \int_0^1 \sum_{n=1}^N \sin \left(\frac{n\pi}{1} x \right) \sin \left(\frac{r\pi}{1} x \right) dx \end{aligned}$$

nous aurons donc à résoudre le problème aux valeurs propres suivant :

$$[M] b''(t) + [G] b'(t) + [K] b(t) = 0 \quad (26)$$

en prenant en considération les relations (23), $[M]$ et $[K]$ sont des matrices diagonales, la matrice $[G]$ étant une matrice antisymétrique.

L'algorithme utilisé pour résoudre numériquement cette équation est "The inverse Power method with shifts" ; "méthodes de la puissance inverse avec balayages" [66] .

Les résultats obtenus sont rassemblés dans le tableau (26-bis) ;

$\chi = 0,5$		
Valeurs propres		
Partie réelle		Partie imaginaire
0,482 942 . 10^{-6}		0,154 609 . 10^3
0,821 404 . 10^{-5}		0,309 522 . 10^3
0,533 867 . 10^{-5}		0,465 093 . 10^3
0,210 282 . 10^{-4}		0,621 523 . 10^3
0,398 087 . 10^{-4}		0,779 480 . 10^3
0,524 893 . 10^{-4}		0,940 440 . 10^3
0,476 596 . 10^{-4}		0,110 265 . 10^4
0,978 588 . 10^{-4}		0,132 350 . 10^4
* 0,146 628 . 10^{+3}		0,145 425 . 10^4
0,230 510 . 10^{-5}		0,162 877 . 10^4
* Résultat non trouvé après 81 itérations.		

(26-bis)

Cette résolution nous fournit des valeurs propres purement imaginaires comme nous étions en droit de l'attendre puisqu'il s'agit d'équations d'un système relatif à un problème de type "gyroscopique" [67] .

La méthode de Galerkin est bien évidemment une méthode approchée, mais à notre connaissance, il n'existe pas d'exemples pratiques où l'allure formelle de la solution ne corresponde pas à la réalité ; c'est-à-dire que si la valeur propre est purement imaginaire, expérimentalement, elle est trouvée purement imaginaire et que, si elle est complexe, la valeur expérimentale

tale obtenue est complexe avec un signe cohérent pour les parties réelles, bien que les valeurs absolues de ces quantités puissent être différentes des valeurs exactes.

III.2. Résolution analytique approchée de l'équation du mouvement :

Envisageons une solution à variable séparée pour résoudre l'équation aux dérivées partielles (19-2) :

$$v(x,t) = f(x) \cdot g(t)$$

l'équation (19-2) devient alors :

$$\varepsilon \frac{d^4 f}{dx^4} g(t) + \frac{d^2 f}{dx^2} g(t) + 2 c \alpha \frac{df}{dx} \cdot \frac{dg}{dt} + \alpha f \frac{d^2 g}{dt^2} = 0$$

pour pouvoir éliminer le temps, il faut que $g(t)$ soit de la forme : e^{st}

$$e^{st} \left[\varepsilon \frac{d^4 f}{dx^4} + \frac{d^2 f}{dx^2} + 2 c \alpha s \frac{df}{dx} + \alpha f s^2 \right] = 0$$

soit :

$$\varepsilon \frac{d^4 f}{dx^4} + \frac{d^2 f}{dx^2} + 2 c \alpha s \frac{df}{dx} + \alpha f s^2 = 0 \quad (27)$$

la résolution classique de cette équation qui est une équation différentielle du 4ème ordre à coefficients constants, conduit à quatre solutions particulières linéairement indépendantes :

$$f_i(x) = e^{q_i x}$$

l'équation caractéristique donnant les valeurs de q_i est donc :

$$\varepsilon q^4 + q^2 + 2 c \alpha s q + \alpha s^2 = 0 \quad (28)$$

la forme générale de la solution de (19-2) est :

$$v(x,t) = \sum_{i=1}^4 A_i e^{st + q_i x} + \sum_{i=1}^4 B_i e^{-st + q_i x} \quad (29)$$

les constantes A_i et B_i seront déterminées par les conditions aux limites du problème ; les conditions physiques les plus naturelles correspondent à :

- Ruban encastré aux extrémités :

$$\left| \begin{array}{l} v(0,t) = v(1,t) = 0 \\ v_{,x}(0,t) = v_{,x}(1,t) = 0 \end{array} \right.$$

- Ruban simplement supporté :

$$\left| \begin{array}{l} v(0,t) = v(1,t) = 0 \\ v_{,xx}(0,t) = v_{,xx}(1,t) = 0 \end{array} \right.$$

Ces conditions aux limites se traduisent par un système d'équations homogènes où les A_i et B_i sont les inconnues. Pour que ce système admette une solution non triviale, il faut que son déterminant soit nul ; les valeurs de s annulant ce déterminant seront les valeurs propres s_n .

S'il est possible de déterminer par des techniques numériques les $q_i(s)$, il n'en est pas de même pour les valeurs numériques de s_n ; en effet, la petitesse des coefficients ε et α interdit pratiquement le traitement du problème sur ordinateur car les calculs conduisent à des produits du type : $0 \times \infty$.

Nous avons préféré résoudre ce problème par méthode de perturbation, car il est clair que le terme du 4ème ordre de l'équation (28) peut être considéré comme une perturbation singulière de l'équation du 2ème ordre (31).

Rappelons rapidement les résultats concernant l'étude du mouvement d'une corde parfaitement flexible entraînée [15, 69, 70, 80].

320. Etude du mouvement d'une corde parfaitement flexible

L'équation du mouvement s'obtient en supprimant dans l'équation (19-2), le terme dû à la raideur :

$$v_{,xx} + 2c\alpha v_{,xt} + \alpha v_{,tt} = 0 \quad (30)$$

En utilisant une solution à variable séparée, $v(x) = f(x) \cdot g(t)$ où $g(t)$ est la solution e^{st} , l'équation différentielle du mouvement s'écrit :

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + 2c\alpha s \frac{df}{dx} + \alpha f s^2 = 0 \quad (31)$$

Si la solution envisagée est de la forme e^{st+qx} , l'équation caractéristique :

$$q^2 + 2 \alpha s q + \alpha s^2 = 0 \quad (32)$$

aura pour racines :

$$\begin{cases} q_1 = -\alpha s + s [c^2 \alpha^2 - \alpha]^{1/2} \\ q_2 = -\alpha s - s [c^2 \alpha^2 - \alpha]^{1/2} \end{cases} \quad (33)$$

l'équation différentielle étant du second ordre, deux constantes A_i et deux constantes B_i sont nécessaires pour exprimer la solution générale :

$$v(x, t) = A_1 e^{st+q_1 x} + A_2 e^{st+q_2 x} + B_1 e^{-st+q'_1 x} + B_2 e^{-st+q'_2 x}$$

$$\text{or} \quad \begin{cases} q'_1 = -q_1 \\ q'_2 = -q_2 \end{cases}$$

dans ce cas-là, les conditions aux limites se réduisent à :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ e^{q_1 l} & e^{q_2 l} & e^{-q_1 l} & e^{-q_2 l} \\ e^{q_1 l} & e^{q_2 l} & -e^{-q_1 l} & -e^{-q_2 l} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = 0$$

A_1 et A_2 , B_1 et B_2 sont différents de zéro so :

$$(e^{q_2 l} - e^{q_1 l}) \cdot (e^{-q_2 l} - e^{-q_1 l}) = 0 \quad (34)$$

soit :

$$(e^{q_2 l} - e^{q_1 l}) = 0 \quad (34-1)$$

$$(e^{-q_2 l} - e^{-q_1 l}) = 0 \quad (34-2)$$

en posant : $q_1 = q_2 + \beta$, les équations (34-1) et (34-2) transformées respectivement en :

$$e^{q_2 l} (1 - e^{\beta l}) = 0 \quad \text{et} \quad e^{-q_2 l} (1 - e^{-\beta l}) = 0$$

sont satisfaites lorsque :

$$1 - e^{\beta l} = 0 \quad \text{et} \quad 1 - e^{-\beta l} = 0$$

c'est-à-dire : $\beta = \pm 2 j n \frac{\pi}{l}$

en tenant compte des relations (33), nous obtenons :

$$2 s_n (c^2 \alpha^2 - \alpha)^{1/2} = 2 j n \frac{\pi}{1}$$

$$s_n = \pm j \frac{n \pi}{1(c^2 \alpha^2 - \alpha)^{1/2}} \quad (35)$$

321. Méthode de résolution de l'équation (28)

Nous allons voir comment résoudre l'équation (36) par une méthode de perturbation ; cette équation (36) est, pour des commodités de calcul une transposition de l'équation (28) :

$$\varepsilon' q^4 - q^2 - aq - b = 0 \quad (36)$$

où :

$$\varepsilon' = |\varepsilon| \quad a = 2 c \alpha s \quad \text{et} \quad b = \alpha s^2$$

avec $\varepsilon < 0$ et $\alpha < 0$

Cherchons une solution de la forme :

$$q = \varepsilon'^{p_0} q_0 + \varepsilon'^{p_1} q_1 + \varepsilon'^{p_2} q_2 + \dots \quad (37)$$

où les p_i sont les nombres rationnels
et avec les hypothèses suivantes :

$$\left| \begin{array}{l} \varepsilon'^{p_0} > \varepsilon'^{p_1} \quad \text{soit} \quad p_0 < p_1 \quad \text{car} \quad \varepsilon' \ll 1 \quad (38-1) \\ q_i \neq 0 \quad (38-2) \end{array} \right.$$

Dans cet exposé, nous limiterons le développement à 2 termes pour q :

$$q = \varepsilon'^{p_0} q_0 + \varepsilon'^{p_1} q_1 \quad (37\text{-bis})$$

En reportant cette valeur dans l'équation (36), il en résulte l'équation suivante :

$$\begin{aligned} q_0^4 \varepsilon'^{4p_0+1} + 4 q_0^3 q_1 \varepsilon'^{3p_0+p_1+1} + 6 q_0^2 q_1^2 \varepsilon'^{2p_0+2p_1+1} + 4 q_0 q_1^3 \varepsilon'^{p_0+3p_1+1} + \\ q_1^4 \varepsilon'^{4p_1+1} - q_0^2 \varepsilon'^{2p_0} - 2 q_0 q_1 \varepsilon'^{p_0+p_1} - q_1^2 \varepsilon'^{2p_1} - a \varepsilon'^{p_0} q_0 - a \varepsilon'^{p_1} q_1 - b = 0 \end{aligned} \quad (39)$$

Comparons l'ordre de grandeur des termes compte-tenu de l'hypothèse (38-1) :

$$\epsilon, p_0 > \epsilon, p_1$$

$$\epsilon, 2p_0 > \epsilon, p_0 + p_1 > \epsilon, 2p_1$$

$$\epsilon, 4p_0 + 1 > \epsilon, 3p_0 + p_1 + 1 > \epsilon, 2p_0 + 2p_1 + 1 > \epsilon, p_0 + 3p_1 + 1 > \epsilon, 4p_1 + 1$$

La conclusion que nous pouvons tirer de ce système d'inégalités est que les termes les plus importants sont les suivants :

$$\epsilon, 4p_0 + 1 ; \epsilon, 2p_0 ; \epsilon, p_0 ; \epsilon^0 \quad (39-1)$$

Il reste à déterminer les valeurs de p_0 et de p_1 qui satisfont l'équation (39) ; nous sommes amenés à faire des essais systématiques.

Discussion :

$$3210. \quad \underline{\underline{p_0 = 0}}$$

L'équation (39) prend la forme (39-1) :

$$\left| \begin{aligned} & q_1^4 \epsilon, 4p_1 + 1 + 4 q_0 q_1^3 \epsilon, 3p_1 + 1 + 6 q_0^2 q_1^2 \epsilon, 2p_1 + 1 - q_1^2 \epsilon, 2p_1 + \\ & 4 q_0^3 q_1 \epsilon, p_1 + 1 + q_0^4 \epsilon' - (2 q_0 q_1 + a q_1) \epsilon, p_1 - (q_0^2 + a q_0 + b) \epsilon^0 = 0 \end{aligned} \right. \quad (39-2)$$

Comme $p_1 > p_0$, par hypothèse, p_1 sera strictement positif ; il est alors facile d'ordonner les termes :

$4p_1 + 1 > 3p_1 + 1 > 2p_1 + 1 > \begin{array}{c} \uparrow \\ p_1 > 1 \end{array} > p_1 + 1 > \begin{array}{c} \uparrow \\ p_1 < 1 \end{array} > p_1 > p_0 = 0$ $\underbrace{\hspace{10em}}_{2p_1}$
$\epsilon, 4p_1 + 1 < \epsilon, 3p_1 + 1 < \epsilon, 2p_1 + 1 < \begin{array}{c} \uparrow \\ < \epsilon, p_1 + 1 < \end{array} < \begin{array}{c} \uparrow \\ < \epsilon, p_1 < \epsilon, p_0 \end{array} = \epsilon^0$ $\underbrace{\hspace{10em}}_{\epsilon, 2p_1}$

Dans cette équation, il y a des termes indépendants de ϵ' et des termes dépendants de ϵ' par l'intermédiaire de p_1 .



Annulons les termes prépondérants, c'est-à-dire ceux qui sont indépendants de ϵ' :

$$q_0^2 + a q_0 + b = 0 \quad (40-1)$$

$$q_0 = \frac{1}{2} (-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}) = \frac{1}{2} (-a \pm a \sqrt{1 - \frac{4b}{a^2}}) \quad (40-2)$$

Il reste à déterminer p_1 et q_1 , en effectuant un raisonnement semblable.

Compte-tenu de l'identité (40-1), l'équation (39-2) se réduit à :

$$\epsilon'^{p_1} (-2 q_0 q_1 - a q_1) + q_0^4 \epsilon' + \dots = 0$$

$$32100. \quad \underline{0 < p_1 < 1}$$

Annulons les termes en ϵ'^{p_1} :

$$q_1 (2q_0 + a) \equiv 0$$

soit en remplaçant q_0 par sa valeur (40-2) :

$$q_1 (\pm \sqrt{a^2 - 4b}) \equiv 0$$

Cette identité est impossible car q_1 est différent de zéro (hypothèse 38-2).

p_1 ne peut donc pas être un nombre fractionnaire compris entre 0 et 1.

p_1 doit donc être égal à 1.

L'ambiguïté qui s'est posée pour placer $2p_1$ par rapport à $(p_1 + 1)$ ne se pose donc plus.

$$32101. \quad \underline{p_1 = 1}$$

Les termes indépendants de ϵ' ayant disparu, l'équation (39-2) est réduite aux 3 termes suivants :

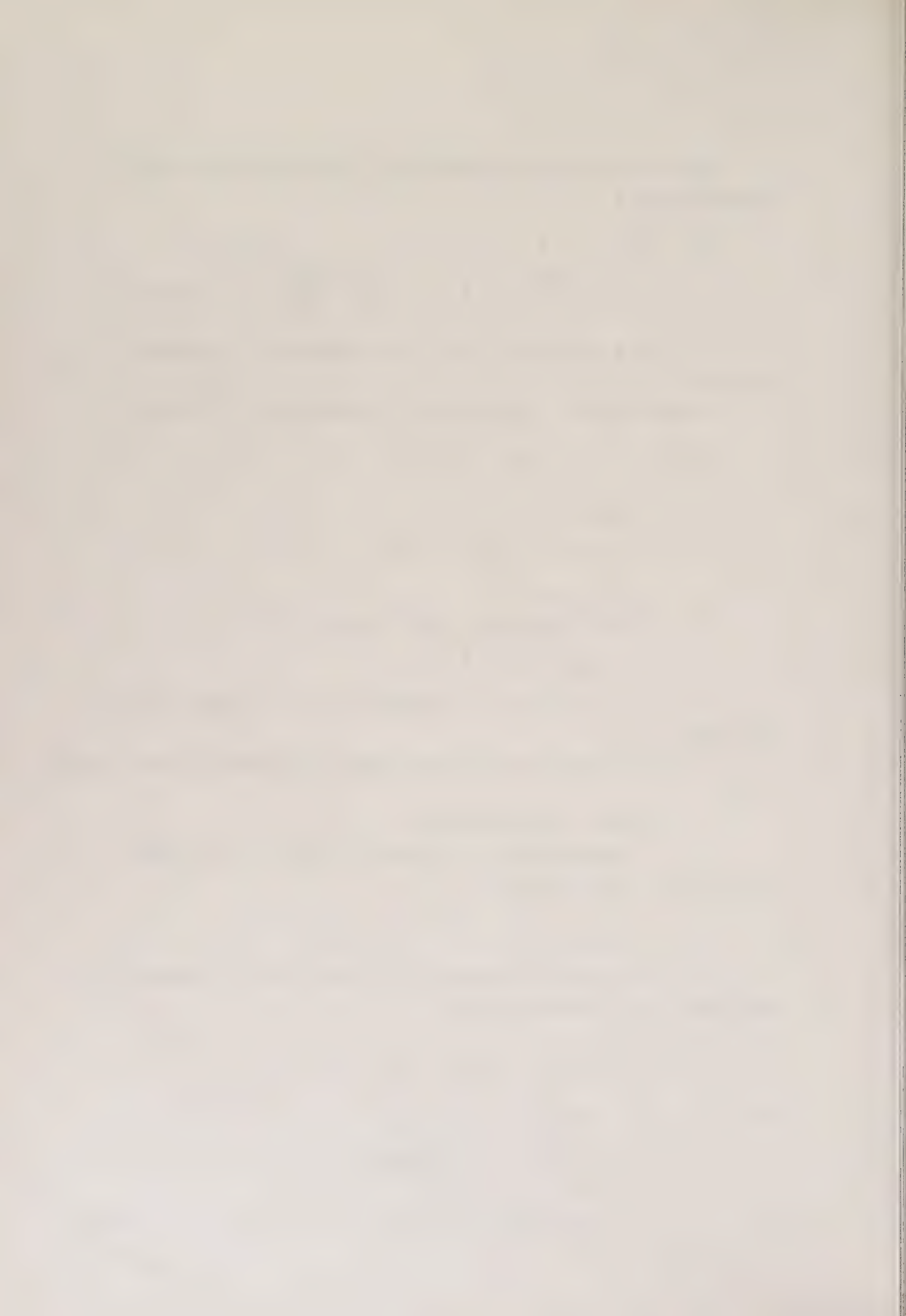
$$\epsilon'^{p_1} (q_0^4 - 2 q_0 q_1 - a q_1) = 0$$

soit

$$q_0^4 - q_1 [2 q_0 + a] \equiv 0$$

$$q_1 = \frac{q_0^4}{2q_0 + a} = \frac{q_0^4}{\sqrt{a^2 - 4b}}$$

La 1ère famille de solutions est donc en utilisant (37-bis) :



$$q = \frac{1}{2} \left(-a \pm a \sqrt{1 - \frac{4b}{a^2}} \right) \pm \frac{q_0^4}{\sqrt{a^2 - 4b}} \varepsilon' + \dots$$

soit

$$q = \frac{1}{2} \left(-a \pm a \sqrt{1 - \frac{4b}{a^2}} \right) \pm 0 (\varepsilon') \quad (41)$$

ou
$$q = \frac{1}{2} \left(-a \pm \sqrt{a^2 - 4b} \right) \pm 0 (\varepsilon')$$

Remarque :

Nous constatons, comme nous pouvions nous y attendre que cette première famille correspond aux solutions de la corde parfaitement flexible non perturbée.

$$\underline{3211. \quad p_0 > 0}$$

Conformément à notre conclusion (39-1), les termes les plus importants à prendre en considération sont les suivants :

$$\varepsilon'^{4p_0+1}, \quad \varepsilon'^{2p_0}, \quad \varepsilon'^{p_0}, \quad \varepsilon'^0$$

p_0 étant positif, nous aurons les inégalités suivantes :

$4p_0+1$	$>$	$2p_0$	$>$	p_0	$>$	0
ε'^{4p_0+1}	$<$	ε'^{2p_0}	$<$	ε'^{p_0}	$<$	ε'^0

Le terme le plus important est le terme indépendant de ε' et l'équation (39) se réduit à $b = 0$; ce qui est impossible puisque b est différent de zéro.

p_0 ne peut donc pas être positif.

$$\underline{3212. \quad p_0 < 0}$$

p_0 étant négatif, le tableau d'inégalités sera le suivant :

$4p_0+1$	$<$	$2p_0$	$<$	p_0	$<$	0
ε'^{4p_0+1}	$>$	ε'^{2p_0}	$>$	ε'^{p_0}	$>$	ε'^0

En ne considérant que le terme le plus important, l'équation (39) devient :

$$q_0^4 \varepsilon'^{4p_0+1} = 0$$

q_0 étant différent de zéro (hypothèse 38-2), cette égalité est impossible ; nous allons donc considérer l'équation (39) réduite à 2 de ces termes les plus importants :

$$q_0^4 \varepsilon^{4p_0+1} - q_0^2 \varepsilon^{2p_0} = 0$$

équation satisfaite si :

$$4p_0+1 = 2p_0 \quad \text{soit} \quad p_0 = -\frac{1}{2} \quad (42-1)$$

$$\text{et} \quad q_0^4 - q_0^2 = 0 \quad \text{soit} \quad q_0 = \pm 1 \quad (42-2)$$

Il faut maintenant déterminer p_1 et q_1 .

Trois cas sont à considérer : $p_1 = 0$, $p_1 > 0$ et $p_1 < 0$.

Il est nécessaire de prendre en considération les relations (42-1) et (42-2).

p_0 étant égal à $-\frac{1}{2}$, dressons un tableau nous donnant les valeurs des différents exposants de (39) :

Exposants	$4p_0+1$	$3p_0+p_1+1$	$2p_0+2p_1+1$	p_0+3p_1+1	$4p_1+1$	$2p_0$	p_0+p_1	$2p_1$	p_0	p_1	0
$p_0 = -\frac{1}{2}$ $p_1 > \text{ou} < 0$	-1	$p_1 - \frac{1}{2}$	$2p_1$	$3p_1 + \frac{1}{2}$	$4p_1+1$	-1	$p_1 - \frac{1}{2}$	$2p_1$	$-\frac{1}{2}$	p_1	0
$p_0 = -\frac{1}{2}$ $p_1 = 0$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	3	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0

32120. $p_1 > 0$

Mis à part les exposants ($4p_0+1$) et $2p_0$ utilisés précédemment, qui prennent la valeur -1, l'exposant le plus petit est $-\frac{1}{2}$ et le terme prépondérant de l'équation (39) est $a q_0 \varepsilon^{-\frac{1}{2}}$; annuler ce terme conduit à une impossibilité puisque a et q_0 sont tous les deux différents de zéro.

32121. $p_1 < 0$

Le terme dominant est $q_1^4 \varepsilon^{4p_1+1}$, ce qui conduit également à une impossibilité.



$$\frac{32122. p_1}{-----} = 0$$

Les termes les plus importants sont alors les termes en $\epsilon'^{-\frac{1}{2}}$; l'équation (39) se réduit à :

$$4 q_0^3 q_1 - 2 q_0 q_1 - a q_0 = 0$$

$$\text{soit } q_1 = + \frac{a}{4 q_0^2 - 2} = + \frac{a}{2}$$

Nous avons donné le principe de calcul en limitant le développement à 2 termes ; nous indiquons ci-dessous le résultat concernant les valeurs de p_1 et p_2 .

Quand nous effectuons un développement à 3 termes pour q , les résultats sont les suivants :

$$p_2 = \frac{1}{2}$$

$$q_2 = \frac{1}{8} [3 a^2 - 4b]$$

La 2ème famille de solutions est donc :

$$q = \pm \epsilon'^{-\frac{1}{2}} + \frac{a}{2} \mp \frac{1}{8} [3 a^2 - 4b] \epsilon'^{-\frac{1}{2}} + \dots$$

soit

$$q = \pm \epsilon'^{-\frac{1}{2}} + \frac{a}{2} + 0 \quad (\epsilon'^{1/2}) \quad (43)$$

Réécrivons maintenant les 2 familles de solutions de l'équation (28) avec les véritables coefficients :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 = [-c \alpha + \sqrt{c^2 \alpha^2 - \alpha}] s \\ q_2 = [-c \alpha - \sqrt{c^2 \alpha^2 - \alpha}] s \\ q_3 = c \alpha s - (\epsilon')^{-\frac{1}{2}} \\ q_4 = c \alpha s + (\epsilon')^{-\frac{1}{2}} \end{array} \right. \quad (44)$$

avec $\epsilon' = |\epsilon|$

α : une quantité négative



III.3. Valeurs et modes propres :

Pour traiter ce problème sur un calculateur de bureau qui ne travaille pas en complexe, il est nécessaire de réaliser l'artifice suivant : considérons le système général où les x_i et les y_i sont les inconnues :

$$\begin{bmatrix} a_{11}+jb_{11} & a_{12}+jb_{12} & a_{13}+jb_{13} \\ a_{21}+jb_{21} & a_{22}+jb_{22} & a_{23}+jb_{23} \\ a_{31}+jb_{31} & a_{32}+jb_{32} & a_{33}+jb_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1+jy_1 \\ x_2+jy_2 \\ x_3+jy_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1+jd_1 \\ c_2+jd_2 \\ c_3+jd_3 \end{bmatrix}$$

sous une forme contractée, ce système s'écrit :

$$[A + j B] \cdot [X + j Y] = [C + j D]$$

soit :

$$\begin{cases} A X - B Y = C \\ B X + A Y = D \end{cases}$$

en l'écrivant sous la forme suivante, nous obtenons l'algorithme de calcul :

$$\left[\begin{array}{c|c} A & -B \\ \hline B & A \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} X \\ Y \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} C \\ D \end{array} \right] \quad (45)$$

331. Détermination des valeurs propres perturbées.

3311. Cas du ruban simplement supporté.

Le système d'équations homogènes obtenu est le système (46) représenté à la page suivante.

La condition nécessaire et suffisante pour que ce système admette des solutions autres que la solution zéro est que le déterminant du système soit nul.



$$\begin{bmatrix}
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 q_1^1 e_1^1 & q_2^1 e_2^1 & q_3^1 e_3^1 & q_4^1 e_4^1 & q_1^1 e_1^1 & q_2^1 e_2^1 & q_3^1 e_3^1 & q_4^1 e_4^1 \\
 q_1^1 e_1^1 & q_2^1 e_2^1 & q_3^1 e_3^1 & q_4^1 e_4^1 & -q_1^1 e_1^1 & -q_2^1 e_2^1 & -q_3^1 e_3^1 & -q_4^1 e_4^1 \\
 q_1^2 & q_2^2 & q_3^2 & q_4^2 & q_1^2 & q_2^2 & q_3^2 & q_4^2 \\
 q_1^2 & q_2^2 & q_3^2 & q_4^2 & -q_1^2 & -q_2^2 & -q_3^2 & -q_4^2 \\
 q_1^2 e_1^1 & q_2^2 e_2^1 & q_3^2 e_3^1 & q_4^2 e_4^1 & q_1^2 e_1^1 & q_2^2 e_2^1 & q_3^2 e_3^1 & q_4^2 e_4^1 \\
 q_1^2 e_1^1 & q_2^2 e_2^1 & q_3^2 e_3^1 & q_4^2 e_4^1 & -q_1^2 e_1^1 & -q_2^2 e_2^1 & -q_3^2 e_3^1 & -q_4^2 e_4^1
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 A_1 \\
 A_2 \\
 A_3 \\
 A_4 \\
 B_1 \\
 B_2 \\
 B_3 \\
 B_4
 \end{bmatrix}
 = 0 \quad (46)$$



En tenant compte des résultats précédents (44), nous pouvons établir les relations suivantes entre les racines q_i (s) et q'_i (s) :

$$\left| \begin{array}{l} q'_1 = - q_1 \\ q'_2 = - q_2 \\ q'_3 = - q_4 \\ q'_4 = - q_3 \end{array} \right. \quad (47)$$

s est a priori complexe et nous avons été conduits à des calculs qui se sont avérés inextricables ; il est préférable d'exploiter les résultats (26-bis) : nous prendrons pour S une forme purement imaginaire :

$$S = j \omega \quad (48)$$

pour alléger l'écriture des équations, exprimons les racines sous la forme suivante :

$$\left| \begin{array}{l} q_1 = jf \\ q_2 = jg \\ q_3 = jh - m \\ q_4 = jh + m \end{array} \right. \quad (48-1)$$

et

$$\left| \begin{array}{l} q'_1 = - jf \\ q'_2 = - jg \\ q'_3 = - (jh + m) \\ q'_4 = - (jh - m) \end{array} \right. \quad (48-2)$$

avec :

$$\left| \begin{array}{l} f = \omega \left[- c \alpha + \sqrt{c^2 \alpha^2 - \alpha} \right] \\ g = \omega \left[- c \alpha - \sqrt{c^2 \alpha^2 - \alpha} \right] \\ h = c \alpha \omega \\ m = (\epsilon')^{-1/2} \end{array} \right.$$



Remplaçons maintenant les $q_i(s)$ et les $q_i'(s)$ par leurs expressions respectives dans le système d'équations (46) ; le déterminant D_{ss} de ce système comporte une partie réelle A_{ss} et une partie imaginaire B_{ss} données dans les pages suivantes sous forme de tableau (49 et 50).

Etant donnée l'importance du produit ml , c'est-à-dire $l.(\epsilon')^{-1/2}$, nous avons annulé les termes en e^{-ml} .

La résolution numérique de ce déterminant, en utilisant l'artifice de programmation (45) cité précédemment, nous donne différentes valeurs de ω .

Les résultats obtenus sont rassemblés dans le tableau (54).

3312. Cas du ruban encastré.

L'équation caractéristique du mouvement est donnée par l'équation (28) et la forme générale de la solution par la relation (29).

Les constantes A_i et B_i seront déterminées par les conditions aux limites du problème : le ruban étant encastré aux extrémités, les relations (1) doivent être satisfaites à $x = 0$ et $x = 1$.

Pour que le système (51) représenté à la page suivante admette une solution non triviale, il faut que son déterminant soit nul.

Ce déterminant D_e a une partie réelle A_e et une partie imaginaire B_e représentées par les tableaux (52) et (53) ; la résolution numérique de ce déterminant, en utilisant l'algorithme (45) et en prenant s sous la forme (47), nous donne différentes valeurs de ω .



$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{cccccc}
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\
 \cos f1 & \cos g1 & 0 & \cos h1.e^{ml} & \cos f1 & \cos g1 \\
 \cos f1 & \cos g1 & 0 & \cos h1.e^{ml} & -\cos f1 & -\cos g1 \\
 -f^2 & -g^2 & m^2 - h^2 & m^2 - h^2 & -f^2 & -g^2 \\
 -f^2 & -g^2 & m^2 - h^2 & m^2 - h^2 & f^2 & g^2 \\
 -f^2 \cos f1 & -g^2 \cos g1 & 0 & [(m^2-h^2) \cos h1 - 2hm \sin h1] e^{ml} & -f^2 \cos f1 & -g^2 \cos g1 \\
 -f^2 \cos f1 & -g^2 \cos g1 & 0 & [(m^2-h^2) \cos h1 - 2hm \sin h1] e^{ml} & f^2 \cos f1 & g^2 \cos g1
 \end{array} \right] \begin{array}{l} 1 \\ -1 \\ \cos h1.e^{ml} \\ -\cos h1.e^{ml} \\ m^2 - h^2 \\ -(m^2-h^2) \\ [(m^2-h^2) \cos h1 - 2hm \sin h1] e^{ml} \\ -[(m^2-h^2) \cos h1 + 2hm \sin h1] e^{ml} \end{array}
 \end{aligned}$$

(49)

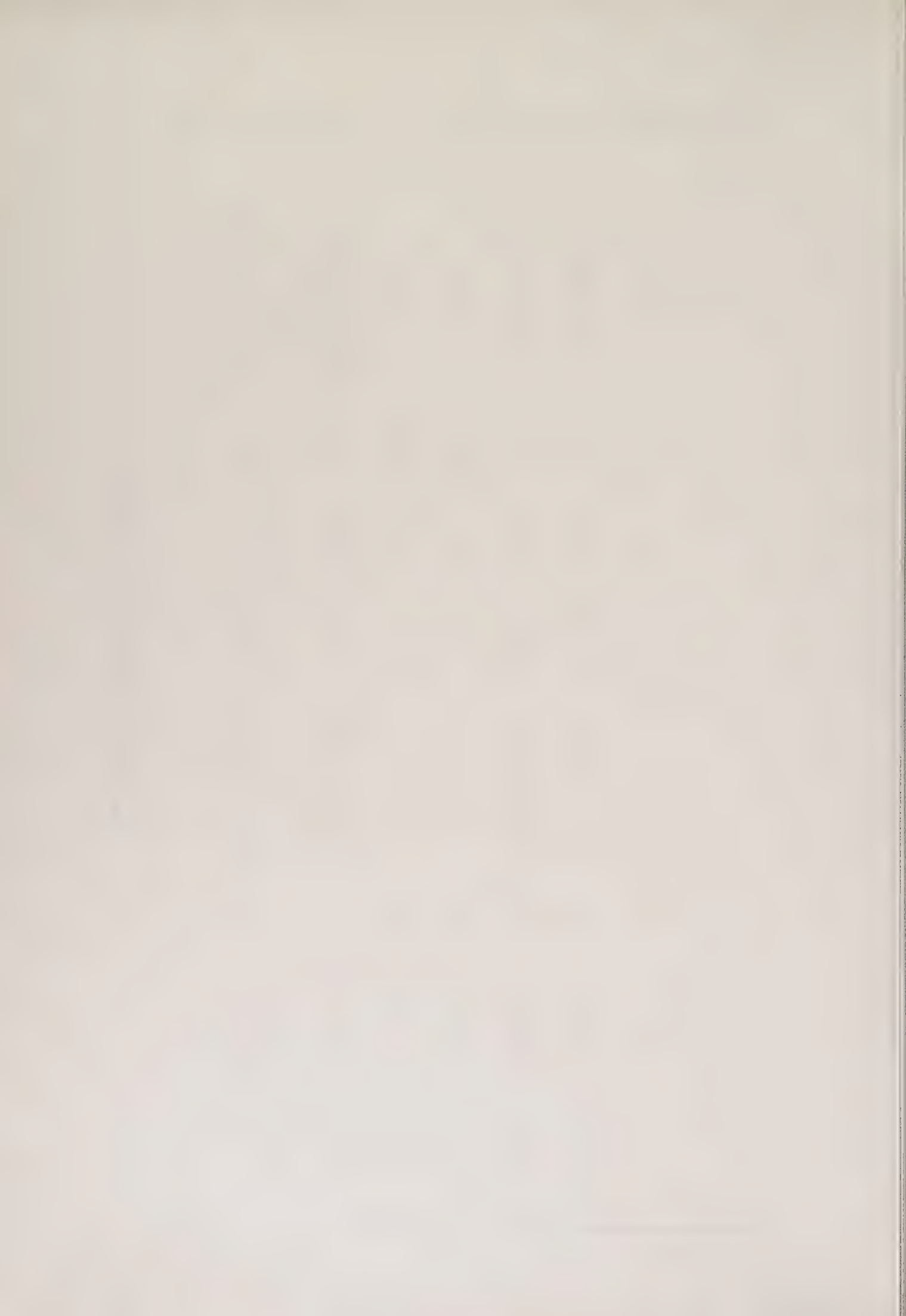
Partie réelle A_{ss} du déterminant D_{ss}



$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{cccccccc}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \sin f1 & \sin g1 & 0 & \sin h1 \cdot e^{ml} & -\sin f1 & -\sin g1 & 0 & -\sin h1 \cdot e^{ml} \\
 \sin f1 & \sin g1 & 0 & \sin h1 \cdot e^{ml} & \sin f1 & \sin g1 & 0 & \sin h1 \cdot e^{ml} \\
 0 & 0 & -2 hm & 0 & 0 & 0 & 2 hm & -2 hm \\
 0 & 0 & -2 hm & 0 & 0 & 0 & -2 hm & +2 hm \\
 -f^2 \sin f1 & -g^2 \sin g1 & 0 & [(m^2-h^2) \sin h1 + 2hm \cos h1] e^{ml} & f^2 \sin f1 & g^2 \sin g1 & 0 & -[(m^2-h^2) \sin h1 + 2hm \cos h1] e^{ml} \\
 -f^2 \sin f1 & -g^2 \sin g1 & 0 & [(m^2-h^2) \sin h1 + 2hm \cos h1] e^{ml} & -f^2 \sin f1 & -g^2 \sin g1 & 0 & [(m^2-h^2) \sin h1 + 2hm \cos h1] e^{ml}
 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

(50)

Partie imaginaire B_{ss} du déterminant D_{ss}



Les résultats globaux sont les suivants :

Fil parfaitement flexible		Ruban avec raideur	
conditions aux limites	simplement supporté (S.S.)	simplement supporté (S.S.)	Encastré (E.)
	$\chi = 0,5$	$\chi = 0,5$	$\chi = 0,5$
	0	0	0
Pulsations	154,60	154,60	156,34
ω_n	$\omega_n = n \omega_1$	309,20	314,87
		463,80	468,74
		618,40	624,72

(54)

A la lecture de ces résultats, nous pouvons faire les quelques remarques suivantes :

- la méthode utilisée a permis de calculer les pulsations sans l'emploi de gros ordinateurs [69 - 78] ;
- les pulsations perturbées restent harmoniques : parfaitement pour un ruban simplement supporté et à moins de 1 % pour un ruban encastré aux extrémités ;
- les conditions aux limites du ruban n'ont pas une très grande influence sur la valeur de la pulsation (à 2 % près) ;
- les pulsations naturelles du ruban flexible donnent celles du ruban avec raideur avec une bonne approximation [69 - 78] .

332. Détermination des modes propres de vibration.

Nous ne considérerons que le cas du ruban simplement supporté.

Le système d'équations homogènes (46) admet une famille de solutions de la forme :

$$\{v_n\} = \sum_{i=1}^4 A_{in} e^{j\omega_n t + q_{in} x} + \sum_{i=1}^4 B_{in} e^{-j\omega_n t + q'_{in} x} \quad (55)$$

n étant le n° du mode.



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{q_1 l} & e^{q_2 l} & e^{q_3 l} & e^{q_4 l} & e^{q_1 l} & e^{q_2 l} & e^{q_3 l} & e^{q_4 l} \\ e^{q_1 l} & e^{q_2 l} & e^{q_3 l} & e^{q_4 l} & -e^{q_1 l} & -e^{q_2 l} & -e^{q_3 l} & -e^{q_4 l} \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & -q_1 & -q_2 & -q_3 & -q_4 \\ q_1 e^{q_1 l} & q_2 e^{q_2 l} & q_3 e^{q_3 l} & q_4 e^{q_4 l} & q_1 e^{q_1 l} & q_2 e^{q_2 l} & q_3 e^{q_3 l} & q_4 e^{q_4 l} \\ q_1 e^{q_1 l} & q_2 e^{q_2 l} & q_3 e^{q_3 l} & q_4 e^{q_4 l} & -q_1 e^{q_1 l} & -q_2 e^{q_2 l} & -q_3 e^{q_3 l} & -q_4 e^{q_4 l} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 & 1 \\ A_2 & -1 \\ A_3 & e^{q_1 l} \\ A_4 & -e^{q_1 l} \\ B_1 & q_1 \\ B_2 & -q_1 \\ B_3 & q_1 e^{q_1 l} \\ B_4 & -q_1 e^{q_1 l} \end{bmatrix} = 0 \quad (51)$$



$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{cccccccc}
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\
 \cos f1 & \cos g1 & 0 & \cos h1.e^{ml} & \cos f1 & \cos g1 & \cos h1.e^{ml} & \cos h1.e^{ml} \\
 \cos f1 & \cos g1 & 0 & \cos h1.e^{ml} & -\cos f1 & -\cos g1 & -\cos h1.e^{ml} & -\cos h1.e^{ml} \\
 0 & 0 & -m & m & 0 & 0 & m & m \\
 -f & -g & -h & -h & -f & -g & -h & -h \\
 -f \sin f1 & -g \sin g1 & 0 & \begin{bmatrix} m \cos h1 \\ -h \sin h1 \end{bmatrix} e^{ml} & -f \sin f1 & -g \sin g1 & \begin{bmatrix} m \cos h1 \\ -h \sin h1 \end{bmatrix} e^{ml} & \begin{bmatrix} m \cos h1 \\ -h \sin h1 \end{bmatrix} e^{ml} \\
 -f \cos f1 & -g \cos g1 & 0 & \begin{bmatrix} -m \sin h1 \\ +h \cos h1 \end{bmatrix} e^{ml} & -f \cos f1 & -g \sin g1 & \begin{bmatrix} -m \sin h1 \\ +h \cos h1 \end{bmatrix} e^{ml} & \begin{bmatrix} -m \sin h1 \\ +h \cos h1 \end{bmatrix} e^{ml}
 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

(52)

Partie réelle A_e du déterminant D_e



$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{cccccccc}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \sin f l & \sin g l & 0 & \sin h l . e^{m l} & -\sin f l & -\sin g l & 0 & -\sin h l . e^{m l} \\
 \sin g l & \sin g l & 0 & \sin h l . e^{m l} & \sin f l & \sin g l & 0 & \sin h l . e^{m l} \\
 f & g & h & h & -f & -g & -h & -h \\
 0 & 0 & -m & m & 0 & 0 & m & -m \\
 f \cos g l & g \cos g l & 0 & [\bar{m} \sin h l + h \cos h l] e^{m l} & -f \cos f l & -g \cos g l & 0 & -[\bar{m} \sin h l + h \cos h l] e^{m l} \\
 -f \sin f l & -g \sin g l & 0 & [\bar{m} \cos h l - h \sin h l] e^{m l} & f \sin f l & g \cos g l & 0 & [-\bar{m} \cos h l + h \sin h l] e^{m l}
 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

(53)

Partie imaginaire de D_e

$A_{1n}, A_{2n}, A_{3n}, A_{4n}$ et $B_{1n}, B_{2n}, B_{3n}, B_{4n}$, a priori complexes, ont pour forme respective : $X_{1n} + jY_{1n}, X_{2n} + jY_{2n}, X_{3n} + jY_{3n}, X_{4n} + jY_{4n}$ et $X_{5n} + jY_{5n}, X_{6n} + jY_{6n}$.

Les valeurs numériques q_{in} et q'_{in} s'obtiennent en utilisant les expressions (44), la relation (47) et les résultats rassemblés dans le tableau (54) :

$$\begin{cases} q_{1n} = [-c\alpha + \sqrt{c^2\alpha^2 - \alpha}] j \omega_n = j f_n \\ q_{2n} = [-c\alpha - \sqrt{c^2\alpha^2 - \alpha}] j \omega_n = j g_n \\ q_{3n} = j c \alpha \omega_n - (\epsilon')^{-1/2} = j h_n - m \\ q_{4n} = j c \alpha \omega_n + (\epsilon')^{-1/2} = j h_n + m \end{cases} \quad (56-1)$$

$$\begin{cases} q'_{1n} = -j f_n \\ q'_{2n} = -j g_n \\ q'_{3n} = -j h_n - m \\ q'_{4n} = -j h_n + m \end{cases} \quad (56-2)$$

Le système d'équations homogènes (46) sera donc mis sous la forme suivante afin d'être résolu :

$$\begin{bmatrix} A_{ssn} & -B_{ssn} \\ B_{ssn} & A_{ssn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{1n} \\ \vdots \\ X_{8n} \\ Y_{1n} \\ \vdots \\ Y_{8n} \end{bmatrix} = 0 \quad (57)$$

Nous exprimerons $X_{2n}, \dots, X_{8n}, Y_{1n}, \dots, Y_{8n}$ en fonction de X_{1n} en résolvant le système suivant :

$$\begin{bmatrix}
 \boxed{\times} & \dots & \dots & \dots \\
 \vdots & A_{ssn} & \dots & \dots \\
 \vdots & \vdots & -B_{ssn} & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & B_{ssn} & \dots & A_{ssn}
 \end{bmatrix}
 \cdot
 \begin{bmatrix}
 x_{1n} \\
 x_{2n} \\
 \vdots \\
 x_{8n} \\
 y_{1n} \\
 \vdots \\
 y_{8n}
 \end{bmatrix}
 = -x_{1n}
 \begin{bmatrix}
 \dots \\
 A_{ssn}(I,1) \\
 \vdots \\
 B_{ssn}(I,1)
 \end{bmatrix}
 \quad (58)$$

I : 1, ..., 8

Remarque : Une difficulté numérique due à la présence de termes très grands (en e^{m1}) dans les colonnes 3, 7, 11 et 15 de ce système (15 x 15) a été résolue de la manière suivante : la 1ère ligne est alors :

$$a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + a_{24} x_4 + \dots - b_{29} y_1 \dots - b_{216} y_8 = -x_1 \cdot a_{21} \quad (59)$$

ou

$$a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + a'_{24} x'_4 + \dots - b_{29} y_1 \dots - b_{216} y_8 = -x_1 \cdot a_{21}$$

avec

$$x'_4 = x_4 e^{m1} \quad (59-1)$$

la résolution du système mis sous forme (59) nous fournit x'_4 et x_4 peut être calculé par la relation (59-1).

La solution (55) s'écrit donc :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{x_{1n}} v_n &= e^{j\omega_n t} \left[(1 + j Y_{1n}) e^{q_{1n} x} + (x_{2n} + j Y_{2n}) e^{q_{2n} x} \right. \\
 &\quad \left. + (x_{3n} + j Y_{3n}) e^{q_{3n} x} + (x_{4n} + j Y_{4n}) e^{q_{4n} x} \right] \\
 &+ e^{-j\omega_n t} \left[(x_{5n} + j Y_{5n}) e^{q'_{3n} x} + (x_{4n} + j Y_{4n}) e^{q'_{2n} x} \right. \\
 &\quad \left. + (x_{7n} + j Y_{7n}) e^{q'_{3n} x} + (x_{8n} + j Y_{8n}) e^{q'_{4n} x} \right]
 \end{aligned}$$

Le mode propre "physique" sera obtenu en ne prenant en considération que la partie réelle de la solution mathématique, soit :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{X_{1n}} R_{\hat{e}} |v_n| = & \cos \omega_n t \left[\cos f_n x (1 + X_{5n}) + \sin f_n x (Y_{5n} - Y_{1n}) \right. \\
 & + \cos g_n x (X_{2n} + X_{6n}) + \sin g_n x (Y_{6n} - Y_{2n}) \\
 & + e^{-mx} \cos h_n x (X_{3n} + X_{7n}) \\
 & + e^{-mx} \sin h_n x (Y_{7n} - Y_{3n}) \\
 & + e^{mx} \cos h_n x (X_{4n} - X_{8n}) \\
 & \left. + e^{mx} \sin h_n x (Y_{8n} - Y_{4n}) \right] \\
 & + \sin \omega_n t \left[-\sin f_n x (X_{5n} + 1) + \cos f_n x (Y_{5n} - Y_{1n}) \right. \\
 & + \cos g_n x (Y_{6n} - Y_{2n}) - \sin g_n x (X_{6n} + X_{2n}) \\
 & + e^{-mx} \cos h_n x (Y_{7n} - Y_{3n}) \\
 & - e^{-mx} \sin h_n x (X_{3n} + X_{7n}) \\
 & + e^{-mx} \cos h_n x (Y_{8n} - Y_{4n}) \\
 & \left. - e^{-mx} \sin h_n x (X_{8n} + X_{4n}) \right] \quad (60)
 \end{aligned}$$

Nous pouvons tracer les modes ($n = 1, 2, 3, 4$).

Pour une valeur fixée de n , considérons cinq valeurs différentes pour le temps, en fonction de la période, en utilisant les valeurs suivantes :

$$t = \frac{\pi}{6\omega_n} ; \frac{2\pi}{6\omega_n} ; \frac{3\pi}{6\omega_n} ; \frac{4\pi}{6\omega_n} ; \frac{5\pi}{6\omega_n}$$

notés respectivement T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 sur les courbes en annexe II.

Recherche des noeuds.

Le tracé des premiers modes de vibration semble faire apparaître des noeuds (v_n nul en ces points).

L'expression (60) a la forme suivante :

$$\frac{1}{x_{1n}} R_e (v_n) = A (x) \cos \omega_n t + B (x) \sin \omega_n t$$

Cette solution est du type propagatoire et non-stationnaire.

Nous obtiendrons ces "noeuds" du système vibratoire en écrivant que $R_e (v)$ est nulle quel que soit le temps.

La valeur x_0 de x qui annulera simultanément $A (x)$ et $B (x)$ nous donnera la position éventuelle de ce noeud.

Effectuons ce calcul pour le mode 2 par exemple :

$$A (x) = 0 \quad \rightarrow \quad x_0 = 1,422$$

$$B (x) = 0 \quad \rightarrow \quad x_0 = 1,423$$

Il semble donc difficile de lever l'ambiguïté, c'est-à-dire d'affirmer qu'en mode 2 par exemple, nous avons un noeud ou un quasi-noeud.

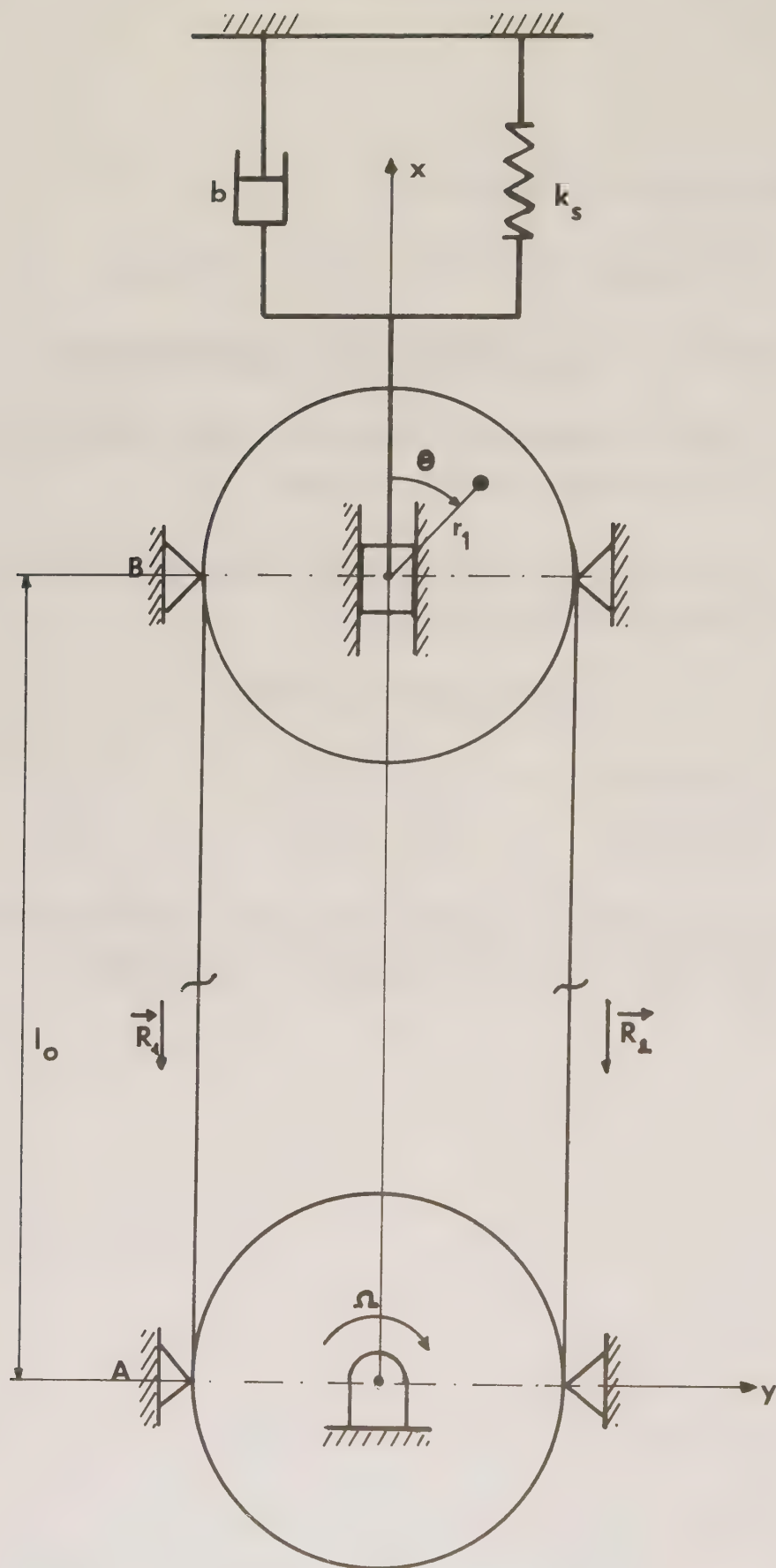


Figure 14

C H A P I T R E I I I

Etude des vibrations du ruban en présence d'un couplage avec le milieu extérieur

I. Mise en équation du système : poulie balourdée, ressort, amortisseur :

Etudions le système suivant : le ruban est entraîné par deux poulies balourdées ; ce balourd pris en considération est représenté par une masse m située à une distance r_1 du centre des poulies ; l'une des poulies est fixée à la structure par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k_s et d'un amortisseur de caractéristique b (kg/s). (fig. n° 14).

Soient M_p la masse de la poulie balourdée et Ω la vitesse de rotation des poulies.

Appelons x le déplacement de la poulie balourdée par rapport à sa position d'équilibre dynamique (fig. n° 15) ; appliquons la loi fondamentale de la mécanique en vue d'obtenir l'équation du mouvement de la poulie :

$$(M_p + m) \ddot{\gamma} = \ddot{R}_1 + \ddot{R}_2 + k_s \dot{x} + b \dot{x}$$

en posant : $M = M_p + m$

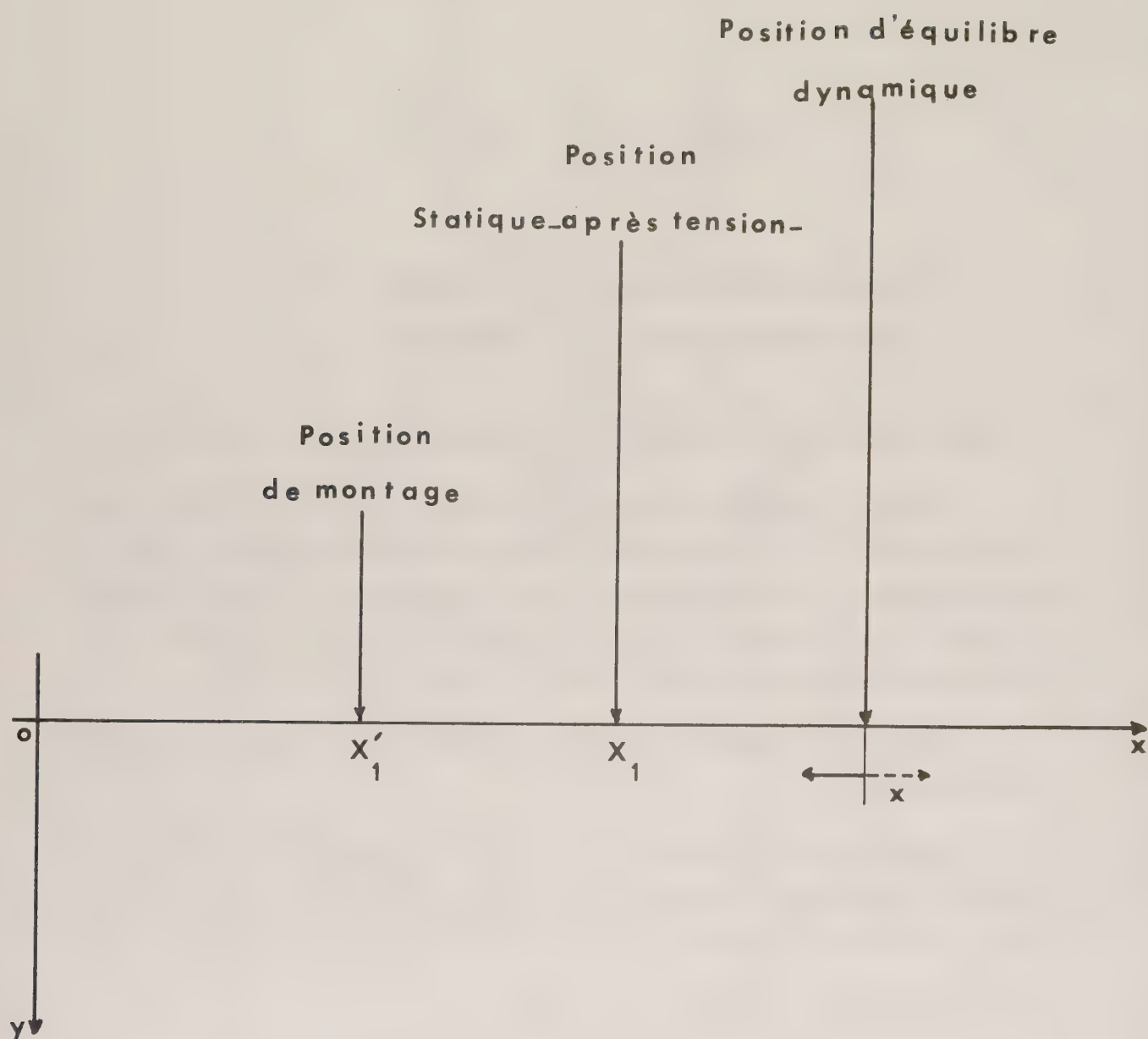
$$M \gamma = - R_1 - R_2 - k_s x - b \dot{x} \quad (61)$$

or la résultante cinétique $\vec{Q}$ est égale à la quantité de mouvement du centre de gravité G où serait concentrée toute la masse [VIII] .

$$\vec{Q} = \sum_i m_i \frac{d\vec{M}_i}{dt} = \left(\sum_i m_i \right) \frac{d\vec{G}}{dt}$$

ce qui s'écrit pour un déplacement x de la poulie :

$$(M_p + m) V_G = M_p \dot{x} + m (\dot{x} - r_1 \sin \theta \dot{\theta})$$



Positions de la scie

Figure 15

car G a pour abscisse : $l_0 + x$ et m : $l_0 + x + r_1 \cos \theta$

d'où :

$$(M_p + m) \gamma_G = M_p \ddot{x} + m (\ddot{x} - r_1 \cos \theta \ddot{\theta}^2 - r_1 \sin \theta \ddot{\theta}) \quad (62)$$

comme $\theta = \Omega t$, $\dot{\theta} = \Omega$ et $\ddot{\theta} = 0$

l'équation (61) devient :

$$M_p \ddot{x} + m \ddot{x} + b \dot{x} + k_s x = - R_1 - R_2 + m \Omega^2 r_1 \cos \Omega t \quad (63)$$

Remarque :

$\vec{C}_A$: vitesse du fil en A

$\vec{C}_B$: vitesse du fil en B

en pratique $|\vec{C}_A|$ est différente de $|\vec{C}_B|$; en effet : $C_B = C_A + \dot{x}$ dans ce qui suit , nous négligerons $\dot{x}$ devant C.

Dans cette étude, nous considérons que la lame tourne à vide et qu'il n'y a pas de différence de tension sensible entre les deux brins ; dans ces conditions, R ne dépend que de l'amplitude instantanée x du mouvement vibratoire :

$$R_1 = R_2 = R(x)$$

L'équation (63) devient :

$$M \ddot{x} + b \dot{x} + k_s x = - 2 R(x) + m \Omega^2 r_1 \cos \Omega t \quad (64)$$

$$\text{avec } R(x) = \frac{ES}{l_0} x \quad (65)$$

Réolvons alors l'équation (64) mise sous la forme :

$$\ddot{x} + \frac{b}{M} \dot{x} + \left(\frac{k_s}{M} + \frac{2ES}{l_0} \right) x = \frac{m}{M} \Omega^2 r_1 \cos \Omega t \quad (66)$$

Cherchons une solution stationnaire de l'équation (66) :

$$x = X_0 \cos (\Omega t + \phi)$$



soit :

$$x = P_1 \sin \Omega t + P_2 \cos \Omega t$$

avec $P_1 = -X_0 \sin \varnothing$ et $P_2 = X_0 \cos \varnothing$

(67)

En reportant dans l'équation (66) et en égalant les termes en phase et en quadrature, nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} \frac{k_s l_0 + 2ES}{M l_0} - \Omega^2 & -\frac{b}{M} \Omega \\ \frac{b}{M} \Omega & \frac{k_s l_0 + 2ES}{M l_0} - \Omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{m}{M} \Omega^2 r_1 \end{bmatrix} \quad (68)$$

soit :

$$P_1 = \frac{b m l_0^2 r_1 \Omega^3}{(k_s l_0 + 2ES - \Omega^2 M l_0)^2 + b^2 l_0^2 \Omega^2}$$

$$P_2 = \frac{(k_s l_0 + 2ES - \Omega^2 M l_0) m l_0 r_1 \Omega^2}{(k_s l_0 + 2ES - \Omega^2 M l_0)^2 + b^2 l_0^2 \Omega^2}$$

les coefficients P_1 et P_2 sont donc très faibles.

La relation (65) nous permet d'exprimer la tension du ruban :

$$R(x) = \frac{ES}{l_0} (P_1 \sin \Omega t + P_2 \cos \Omega t) \quad (69)$$

Dans l'équation (9), remplaçons R par sa nouvelle expression en fonction de x :

$$EJv_{,xxxx} + [\mu c^2 (1-\eta) - R_s - \frac{ES}{l_0} (P_1 \sin \Omega t + P_2 \cos \Omega t)] v_{,xx} \\ + 2c\mu v_{,xt} + \mu v_{,tt} = 0$$

avec les notations utilisées au chapitre précédent :

$$\frac{EJ}{\chi \mu c^2 - R_0} v_{,xxxx} + v_{,xx} + \frac{2c\mu}{\chi \mu c^2 - R_S} v_{,xt} + \frac{\mu}{\chi \mu c^2 - R_S} v_{,tt} =$$

$$\frac{ES X_0}{1_0 (\chi \mu c^2 - R_S)} (\cos (\Omega t + \phi)) v_{,xx}$$

soit :

$$\left[\begin{array}{l} \varepsilon v_{,xxxx} + v_{,xx} + 2c\alpha v_{,xt} + \alpha v_{,tt} = (\varepsilon_1 \sin \Omega t + \varepsilon_2 \cos \Omega t) \cdot v_{,xx} \quad (70) \\ \varepsilon, \alpha, \varepsilon_1 \text{ et } \varepsilon_2 \text{ négatifs.} \end{array} \right.$$

II. Méthode de résolution de l'équation du mouvement :

Dans ce chapitre, nous sommes en présence d'un système où l'influence extérieure se traduit par la dépendance vis-à-vis du temps du paramètre traduisant la variation de la force de tension. Un tel système est dit à "excitation paramétrique".

Pour résoudre l'équation (70), nous travaillerons uniquement avec le terme en $\cos \Omega t$; le terme en $\sin \Omega t$ qui nous permet de déterminer la phase, ferait l'objet d'un traitement similaire. Cette équation se réduit donc à :

$$\varepsilon v_{,xxx} + v_{,xx} + 2c\alpha v_{,xt} + \alpha v_{,tt} = \varepsilon_2 v_{,xx} \cos \Omega t \quad (71)$$

$$\text{soit } L \mid v(x,t) \mid = \varepsilon_2 v_{,xx}(x,t) \cos \Omega t \quad (71\text{-bis})$$

Nous emploierons pour la résolution de (71-bis) une méthode d'approximations successives ; ce qui conduit à chercher, la solution $v(x,t)$ sous la forme :

$$v(x,t) = \mid V_0 + \varepsilon_2 V_1 + \varepsilon_2^2 V_2 + \varepsilon_2^3 V_3 + \dots \mid \quad (72)$$

$V_0, V_1, V_2, \dots$ sont des fonctions inconnues de l'espace x et du temps t ,

en outre, cette solution $v(x,t)$ doit vérifier les conditions aux limites 2 :

$$\left| \begin{array}{l} v(0,t) = v(1_0,t) = 0 \\ v_{,xx}(0,t) = v_{,xx}(1_0,t) = 0 \end{array} \right. \quad \forall t$$

En reportant la solution (72) dans l'équation (71-bis), il vient :

$$L [V_0 + \varepsilon_2 V_1 + \varepsilon_2^2 V_2 + \varepsilon_2^3 V_3 + \dots] = \varepsilon_2 V_{0,xx} + \varepsilon_2 V_{1,xx} + \varepsilon_2^2 V_{2,xx} + \varepsilon_2^3 V_{3,xx} + \dots \cos \Omega t \quad (73)$$

Identifions les termes de même puissance en ε_2 :

$$L(V_0) = 0 \quad (73-1)$$

$$L(V_1) = V_{0,xx} \cos \Omega t \quad (73-2)$$

$$L(V_2) = V_{1,xx} \cos \Omega t \quad (73-3)$$

$$L(V_3) = V_{2,xx} \cos \Omega t \quad (73-4)$$

Réolvons chacune de ces équations ; en tenant compte évidemment de la forme de l'opérateur linéaire L, les solutions V auront la forme indiquée au chapitre précédent, c'est-à-dire :

$$V_p = \sum_{i=1}^4 A_i e^{s_p t + q_{ip} x}$$

- Résolution de l'équation (73-1)

Résoudre cette équation, c'est effectuer l'approximation d'ordre 0 ;

La résolution de cette équation (73-1) en tenant compte des conditions (2), a été faite au chapitre précédent. V_0 sera une suite de solutions particulières, avec $s_n = j\omega_n = jn\omega_1$ selon les résultats exprimés dans le tableau (54).

$$V_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^4 A_{in} e^{j\omega_n t + q_{in} x} \quad (74)$$

- Résolution de l'équation (73-2) ou approximation d'ordre 1

$$L(V_1) = V_{0,xx} \cos \Omega t$$

$V_{0,xx}$ s'obtient en dérivant la relation (74), ce qui nous donne :

$$L \quad V_1 = \cos \Omega t \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^4 A_{in} q_{in}^2 e^{j\omega_n t + q_{in} x}$$

soit :

$$L \quad V_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^4 a_{in} e^{q_{in} x} \cdot [e^{j(\omega_n + \Omega) t} + e^{j(\omega_n - \Omega) t}]$$

$$\text{avec : } a_{in} = \frac{1}{2} A_{in} q_{in}^2 \quad (75)$$

Résoudre l'équation (75), c'est donc trouver une fonction V_1 ; elle sera formellement identique à V_0 :

$$V_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^4 B_{in} e^{q_{in} x} [e^{j(\omega_n + \Omega) t} + e^{j(\omega_n - \Omega) t}]$$

Etant la somme de fonctions $e^{q_{in} x}$, V_1 vérifie automatiquement les conditions aux limites (2) ; car ces fonctions $e^{q_{in} x}$ ont été déterminées précisément au chapitre II, en écrivant que le déplacement transversal du ruban satisfait aux conditions 2 .

La fonction V_1 peut s'écrire de la manière suivante :

$$V_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^4 B_{in} e^{q_{in} x} [e^{j\Omega_n^{'1} t} + e^{j\Omega_n^{''1} t}]$$

chaque fois que les pulsations $\Omega_n^{'1}$ et $\Omega_n^{''1}$ seront identiques à l'une des fréquences propres du système homogène, il y aura résonance :

$$\left| \begin{array}{l} \Omega_n^{'1} = \omega_n + \Omega \\ \Omega_n^{''1} = \omega_n - \Omega \end{array} \right.$$

c'est-à-dire :

$$\left| \Omega_n^1 = \omega_n \pm \Omega = n \omega_1 \pm \Omega \right.$$

- Résolution de l'équation (73-3) ou approximation d'ordre 2.

Un calcul similaire nous conduit à prévoir une résonance quand :

$$\left| \Omega_n^2 = \omega_n \pm 2 \Omega \right.$$

soit

$$\left| \Omega_n^2 = n \omega_1 \pm 2 \Omega \right.$$

III. Exploitation des résultats :

En effectuant une approximation d'ordre r^* , nous aurons résonance lorsque :

$$\Omega_n^r = n \omega_1 \pm r \Omega \quad (75)$$

or les Ω_n^r appartiennent à la série des ω_n ; soit :

$$\Omega_n^r = p \omega_1$$

Il y aura donc résonance quand

$$(p-n) \omega_1 = \pm r \Omega \quad \text{soit} \quad \frac{\omega_1}{\Omega} = \frac{r}{p-n}$$

la pulsation ω_1 a été évaluée à 154,60 rad/s et un calcul simple nous donne pour Ω , 50 rad/s ; nous pouvons donc prévoir quelques pulsations dangereuses pour :

$$r \approx 3 (p - n)$$

Nous avons en effet pour Ω_n^3 :

n	1	2	3	4
Ω_n^3	304,60	459,20	613,80	768,40
	4,60	159,20	313,80	468,40

Ces pulsations Ω_n^3 apparaissent très proches des pulsations libres ω_n rassemblées dans ce tableau ci-dessous :

n	1	2	3	4	5	6
ω_n	154,60	309,20	463,80	618,40	773,0	927,6

Le problème a été présenté simplement en excitant la structure à l'aide d'une poulie balourdée ; mais il existe également d'autres sources excitatrices provoquant une variation de la force de tension de la lame et conduisant à cette excitation du type paramétrique.

- . excitation due aux dents de scie lorsque la lame attaque la grume.

Si P est le pas en centimètres de la denture, la pulsation excitatrice sera :

$$\omega_d = \frac{100}{P} \cdot 2 \cdot c \cdot \pi$$

- . à-coups dans la transmission dus à une courroie détendue ; le couple d'entraînement étant non constant, il en découle une vitesse de défilement c irrégulière ; la composante dynamique de la tension R_d qui est proportionnelle au carré de la vitesse, sera donc variable.

Pour éviter la résonance, il faut donc se placer dans des conditions de fonctionnement telles que la relation (75) ne soit pas satisfaite ; en particulier, il faudra faire très attention à la vitesse de défilement de la lame d'une part et d'autre part, il ne faut pas négliger l'excitation due aux dents au moment du sciage : cette excitation peut très bien avoir peu d'influence sur le brin sciant, mais provoquer des effets néfastes sur le brin libre qui est en pratique toujours moins tendu que l'autre.

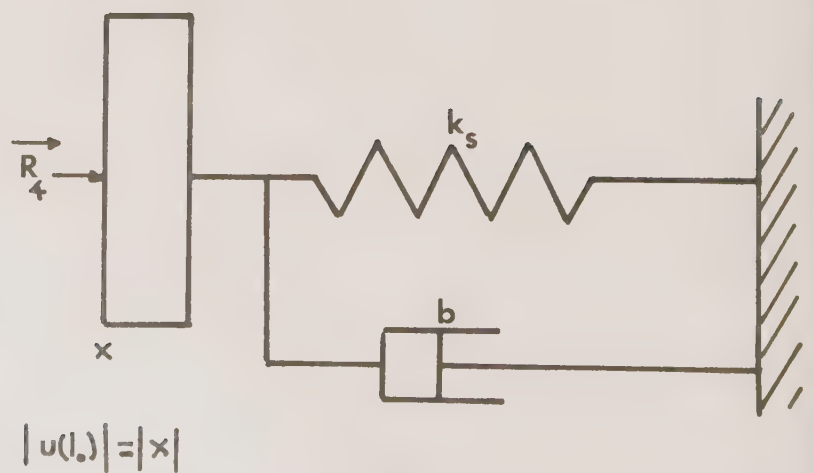
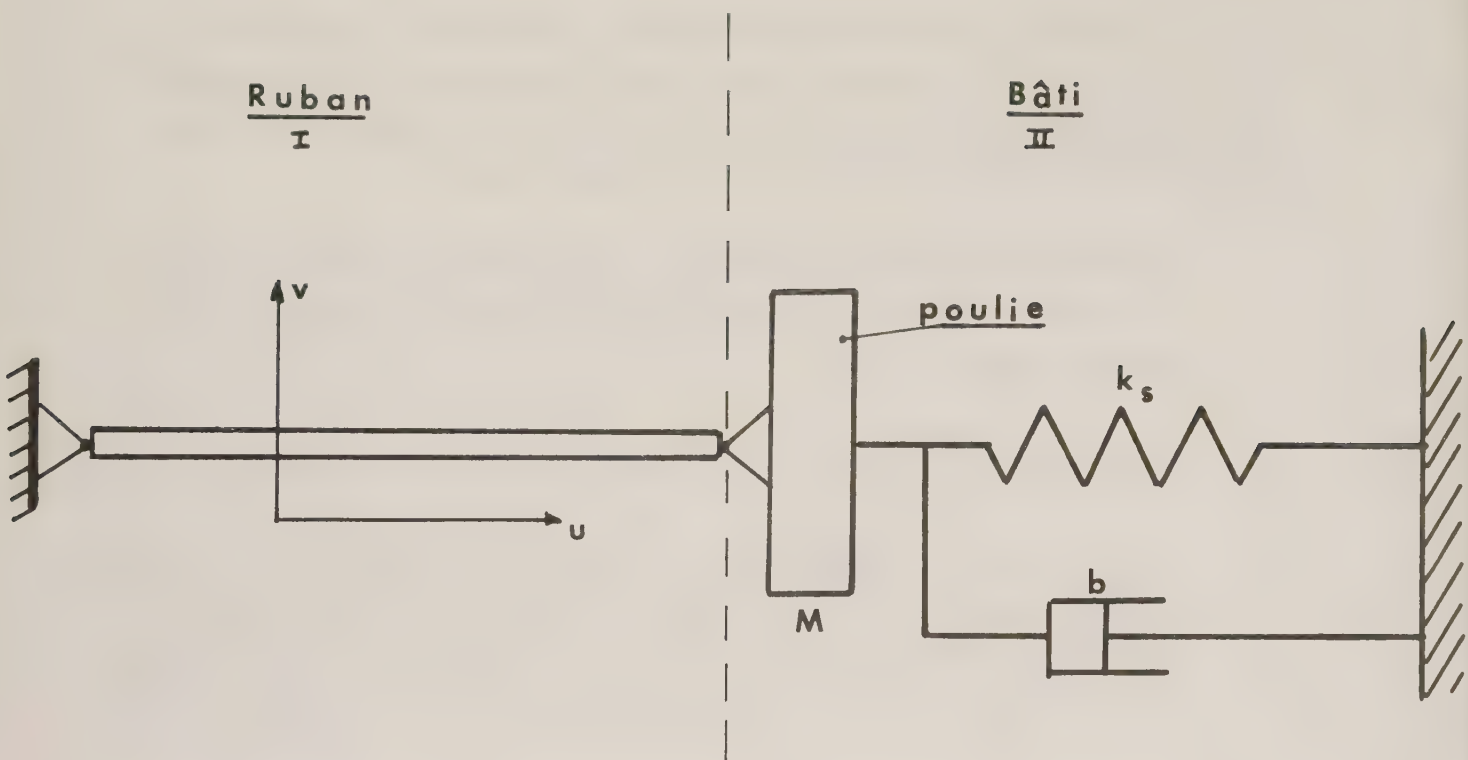


Figure 16

CHAPITRE IV

Etude du couplage entre les vibrations transversales, les vibrations longitudinales du ruban et les vibrations du bâti

Le but principal de ce chapitre est la mise en équation du problème et l'interprétation physique des équations obtenues.

La structure que nous nous proposons d'étudier est représentée sur le schéma (16). Pour résoudre ce problème, nous séparerons la structure en deux sous-systèmes I et II :

- Sous-système I :

Un ruban entraîné à la vitesse c et tendu par une force d'intensité R_3 (à priori inconnue)

- Sous-système II :

Le système discret-introduit au chapitre III- représentant le bâti chargé par la poulie supérieure et soumis à une force d'intensité R_4 (à déterminer également).

I. ETUDE DE LA PREMIERE SOUS-STRUCTURE

I.1. HYPOTHESES

Nous utiliserons toutes les hypothèses faites au chapitre II, sauf celles relatives au vecteur déplacement, car ce dernier possède maintenant deux composantes u et v ; nous considérerons que u et ses dérivées partielles par rapport à x sont du même ordre de grandeur ainsi que v et ses dérivées partielles par rapport à x , mais que u est petit devant v ($u \ll v$).

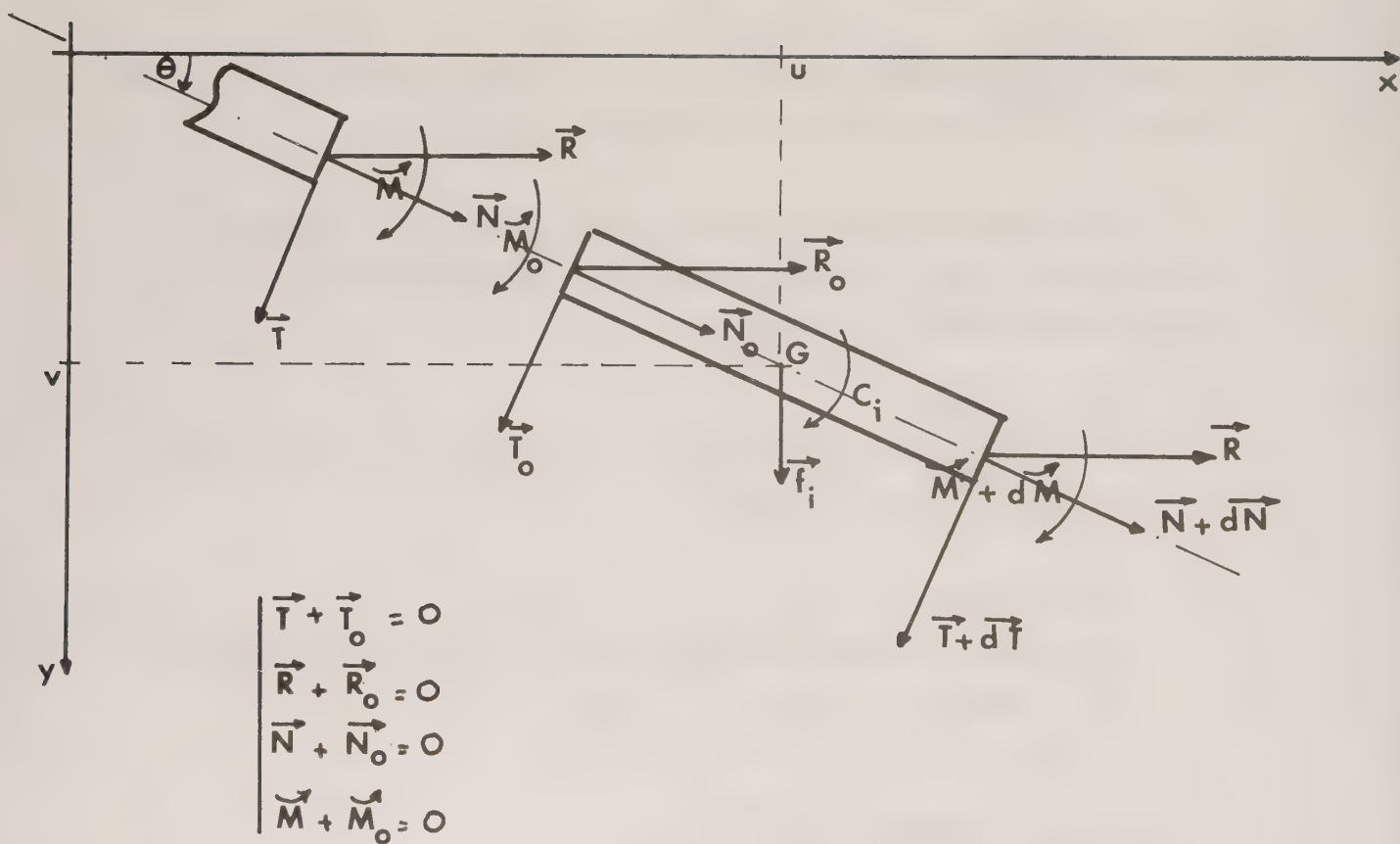


Figure 17

Choisissons x comme paramètre de position d'un point de la poutre déformée.

En repérant un point courant d'une courbe plane par ses coordonnées cartésiennes x et y , nous savons que :

$$\begin{aligned} dx &= ds \cos \theta \\ dy &= ds \sin \theta \\ \operatorname{tg} \theta &= \frac{dy}{dx} = y_{,x} \end{aligned}$$

s étant l'abscisse curviligne et θ l'angle polaire de la tangente.

Notre système étant considéré comme monodimensionnel, les déplacements u et v ne dépendront que de x , d'autre part, la fibre neutre de la poutre non déformée sera confondue avec l'axe Ox ; un point de la déformée sera donc repéré par $u(x)$ et $v(x)$, $v(x)$ jouant le rôle de la deuxième coordonnée cartésienne.

Rappelons quelques relations qui nous seront utiles par la suite :

$$\cos \theta = \frac{1}{(1 + v_{,x}^2)^{1/2}} \quad (76-1)$$

$$\sin \theta = \frac{v_{,x}}{(1 + v_{,x}^2)^{1/2}} \quad (76-2)$$

I.2. MISE EN EQUATION :

Ecrivons les équations d'équilibre d'un tronçon de poutre soumis au système d'efforts représenté figure 17. Cette poutre est considérée comme étant articulée aux deux extrémités.

120 - Equilibre des forces :

En projetant sur Ox et Oy , nous obtenons respectivement :

$$-\frac{dT}{dx} \cdot \sin \theta + \frac{dN}{dx} \cdot \cos \theta - \mu \frac{d^2 u}{dt^2} = 0 \quad (77)$$

$$\frac{dT}{dx} \cdot \cos \theta + \frac{dN}{dx} \cdot \sin \theta - \mu \frac{d^2 v}{dt^2} = 0 \quad (78)$$

121 - Equilibre des moments en G, centre de gravité du tronçon :

$$\frac{dM}{dx} + T - R \sin \theta - P J_z \ddot{\theta} = 0 \quad (79)$$

122 - Equations du mouvement :

Elles s'obtiennent en éliminant l'effort tranchant dont nous ne connaissons pas l'expression analytique respectivement entre les équations (79-78) et (79-77) :

$$\frac{d^2 M}{dx^2} \cdot \cos \theta - \frac{dN}{dx} \cdot \sin \theta - R \cos \theta \cdot \frac{d}{dx} \sin \theta + \mu \frac{d^2 v}{dt^2} - P J_z \cos \theta \cdot \frac{d}{dx} \ddot{\theta} = 0 \quad (80-1)$$

$$\frac{d^2 M}{dx^2} \cdot \sin \theta + \frac{dN}{dx} \cdot \cos \theta - R \sin \theta \cdot \frac{d}{dx} \sin \theta - \mu \frac{d^2 u}{dt^2} - P J_z \sin \theta \cdot \frac{d}{dx} \ddot{\theta} = 0 \quad (80-2)$$

Remarques :

- 1) Nous négligerons par la suite des termes provenant de l'inertie de rotation.
- 2) Il est immédiat de constater qu'en faisant tendre θ vers zéro, nous retrouvons à la limite les équations des vibrations transversales et longitudinales d'une poutre.

I.3. CALCULS INTERMEDIAIRES

Tous les calculs seront développés jusqu'au quatrième ordre pour éviter toute simplification abusive.

130 - Expression de $\frac{d^2M}{dx^2}$, $\frac{d^2M}{dx^2} \cdot \cos \theta$, $\frac{d^2M}{dx^2} \cdot \sin \theta$:

Le moment fléchissant s'exprime en fonction du rayon de courbure de la déformée par la relation suivante :

$$M = \frac{ES}{R_c} = EJ \frac{v_{,xx}}{(1 + v_{,x}^2)^{3/2}}$$

En dérivant deux fois la relation (81) par rapport à x :

$$\frac{1}{EJ} \cdot \frac{d^2M}{dx^2} = (1 + v_{,x}^2)^{-5/2} \left[(1 + v_{,x}^2) v_{,xxxx} - 9 v_{,x} v_{,xx} v_{,xxx} - 3 v_{,xx}^3 + 15 (1 + v_{,x}^2)^{-1} v_{,x}^2 v_{,xx}^3 \right]$$

En tenant compte des relations (76) et en conservant tous les termes jusqu'à ceux du troisième ordre inclus, il vient :

$$\frac{d^2M}{dx^2} \cdot \sin \theta = EJ v_{,x} v_{,xxxx} \quad (82)$$

$$\frac{d^2M}{dx^2} \cdot \cos \theta = EJ (v_{,xxxx} - 2 v_{,xxxx} v_{,x}^2 - 3 v_{,xx}^3 - 9 v_{,x} v_{,xx} v_{,xxx}) \quad (83)$$

131 - Expression de $R \cos \theta \cdot \frac{d}{dx} (\sin \theta)$ et $R \sin \theta \cdot \frac{d}{dx} (\sin \theta)$

Les relations (76) nous permettent d'écrire :

$$\cos \theta \cdot \frac{d}{dx} (\sin \theta) = (v_{,xx} + v_{,xx} v_{,x}^2 - v_{,x} v_{,xx}) (1 + v_{,x}^2)^{-2}$$

$$\sin \theta \cdot \frac{d}{dx} (\sin \theta) = (v_{,x} v_{,xx} + v_{,xx} v_{,x}^3 - v_{,x}^2 v_{,xx}) (1 + v_{,x}^2)^{-2}$$

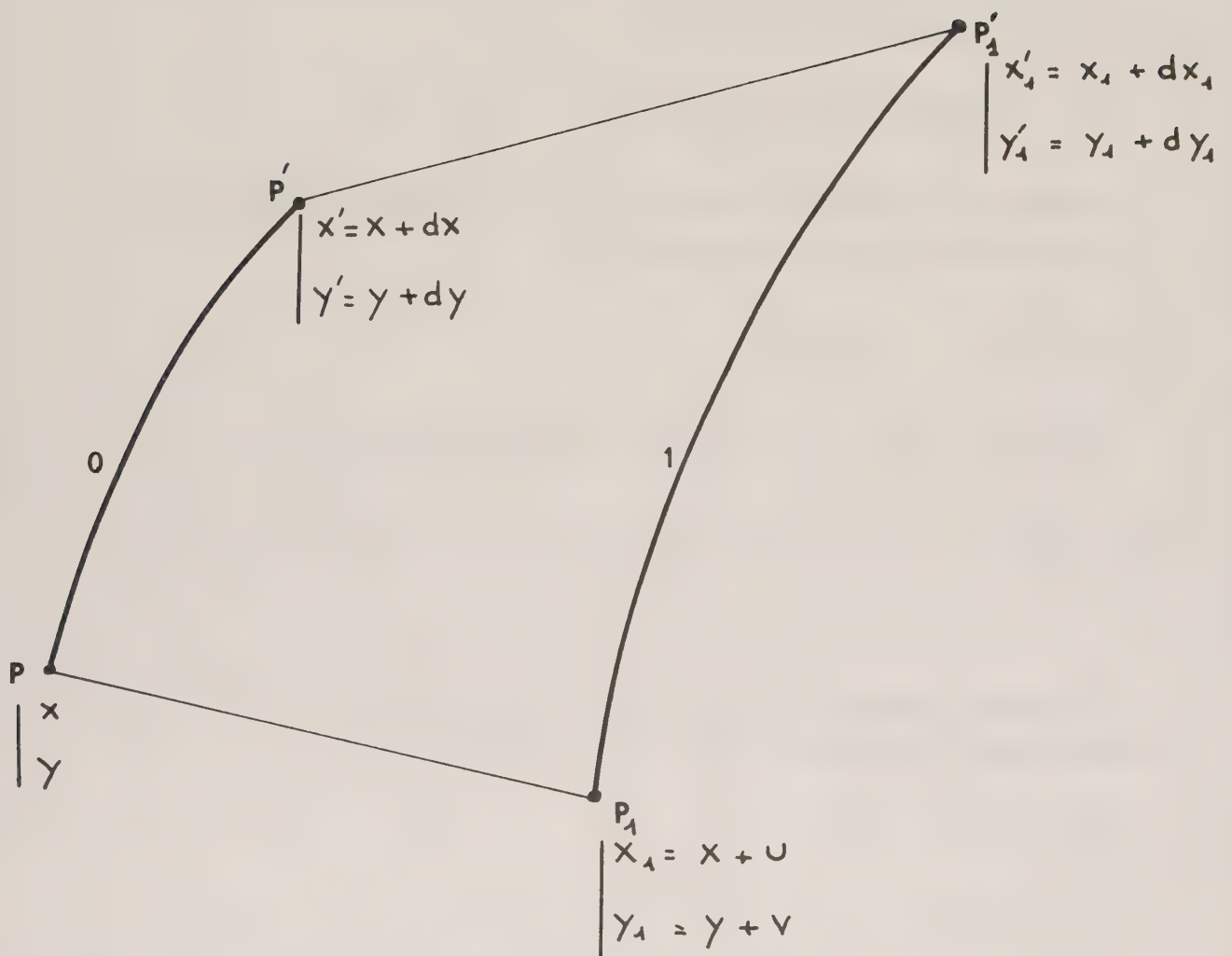


Figure 18

En limitant nos développements aux termes du troisième ordre inclus :

$$R \cos \theta \cdot \frac{d}{dx} (\sin \theta) = R (v_{,xx} - v_{,x} v_{,xx} + v_{,xx} v_{,x}^2 - 2 v_{,xx} v_{,x}^2) \quad (84)$$

$$R \sin \theta \cdot \frac{d}{dx} (\sin \theta) = R (v_{,x} v_{,xx} - v_{,x}^2 v_{,xx}) \quad (85)$$

132 - Expression de $\frac{dN}{dx} \cdot \cos \theta$ et $\frac{dN}{dx} \cdot \sin \theta$:

L'effort normal N est relié à la déformation longitudinale e_1 par la relation :

$$N = E.S.e_1 \quad (86-1)$$

et par conséquent :

$$\frac{dN}{dx} = E.S. \frac{de_1}{dx} \quad (86-2)$$

1320. Détermination de la déformation e_1 :

Envisageons la fibre neutre de la portion de ruban qui occupe à l'instant t_0 la position "0" et à l'instant t_1 la position "1" (figure 18).

Soient P et P' deux éléments très voisins de cet élément de fibre ; ils ont pour coordonnées initiales respectives (x,y) et (x + dx, y + dy) ; dans la transformation P subit un déplacement $\vec{PP}_1 : (u,v)$.

Etudions la variation de longueur d'un élément.

Considérons l'élément $\vec{PP}'$ de longueur ds et de projections :

$$dx = \alpha ds, \quad dy = \beta ds$$

(α, β) désignant les cosinus directeurs de $\vec{PP}'$; cet élément se transforme en un élément $P_1\vec{P}'_1$ de composantes :

$$dx_1 = dx + du = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

$$dy_1 = dy + dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dy$$

et de longueur :

$$ds_1 = (1 + e_1) ds$$

e_1 désignant la déformation suivant la direction (α, β) issue de P dans le corps à l'état initial.

Nous avons donc :

$$ds_1^2 = (1 + e_1)^2 ds^2 = \left[\alpha \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) ds + \beta \frac{\partial u}{\partial y} ds \right]^2 + \left[\alpha \frac{\partial v}{\partial x} ds + \beta \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) ds \right]^2$$

d'où :

$$(1 + e_1)^2 = \left[\alpha \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \alpha \frac{\partial u}{\partial y} \right]^2 + \left[\alpha \frac{\partial v}{\partial x} + \beta \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \right]^2 \quad (87)$$

d'après nos hypothèses u et v sont fonctions de x uniquement ; l'équation (87) prend donc la forme suivante :

$$(1 + e_1)^2 = \alpha^2 \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\alpha \frac{\partial v}{\partial x} + \beta \right)^2$$

soit :

$$e_1^2 + 2 e_1 - \left[\alpha^2 (2 u_{,x} + u_{,x}^2 + v_{,x}^2) + 2 \alpha \beta v_{,x} \right] = 0$$

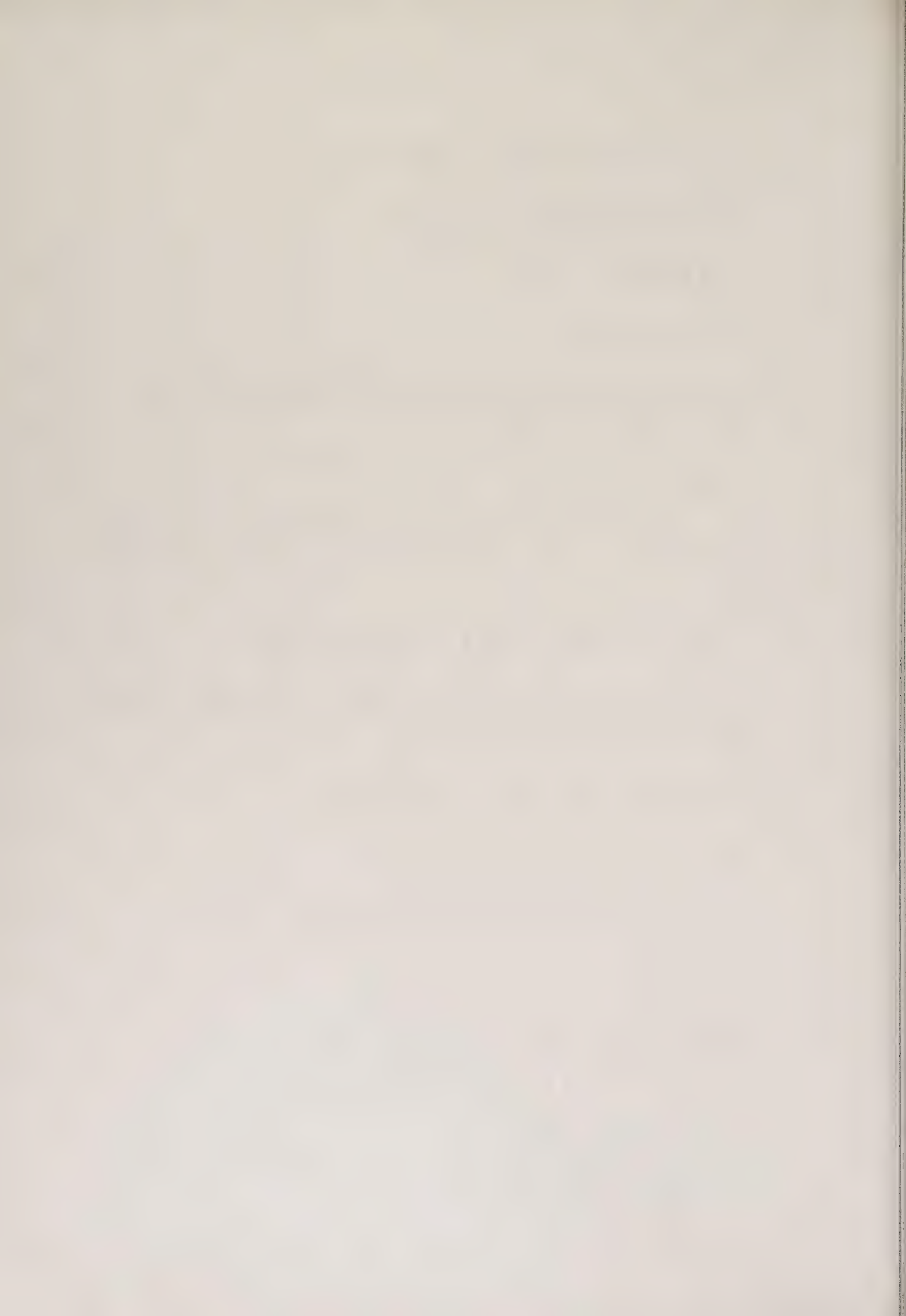
$$\text{car } \alpha^2 + \beta^2 = 1$$

$$\text{en posant } h = \alpha^2 (2 u_{,x} + u_{,x}^2 + v_{,x}^2) + 2 \alpha \beta v_{,x}$$

$$e_1 = -1 \pm (1 + h)^{1/2} = -1 \pm \left(1 \pm \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + \dots\right)$$

une seule racine convient :

$$e_1 = \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + \dots$$



en appliquant ce résultat général à notre problème et en utilisant les relations (76), e_1 a pour expression complète :

$$e_1 = \frac{1}{2} (1 + v_{,x}^2)^{-1} (2 u_{,x} + u_{,x}^2 + 3 v_{,x}^2) - \frac{1}{8} (1 + v_{,x}^2)^{-2} \cdot (4 u_{,x}^2 + 4 u_{,x}^3 + u_{,x}^4 + 6 u_{,x}^2 v_{,x}^2 + 12 u_{,x} v_{,x}^2 + v_{,x}^4) \quad (88)$$

d'après la relation (86-2), nous aurons besoin de la dérivée de cette quantité par rapport à x .

1321. Expression de $\frac{dN}{dx} \cdot \cos \theta$ et $\frac{dN}{dx} \cdot \sin \theta$:

Dérivons e_1 par rapport à x , pour obtenir $\frac{dN}{dx}$; multiplions

respectivement l'expression obtenue par $\cos \theta$ et $\sin \theta$.

$$\frac{dN}{dx} \cdot \cos \theta = ES (u_{,xx} + u_{,x} u_{,xx} + 3 v_{,x} v_{,xx} - 3 u_{,xx} v_{,x}^2 - \frac{3}{2} u_{,x}^2 u_{,xx} - 5 u_{,x} v_{,x} v_{,xx}) \quad (89)$$

$$\frac{dN}{dx} \cdot \sin \theta = ES (v_{,x} u_{,xx} + v_{,x} u_{,x} u_{,xx} + 3 v_{,x}^2 v_{,xx}) \quad (90)$$

I.4. EXPRESSIONS DEFINITIVES DES EQUATIONS DU MOUVEMENT D'UN TRONCON :

Les résultats intermédiaires nous permettent de transformer les équations (80-1) et (80-2) qui, tous calculs faits, en limitant les développements deviennent donc :

$$\mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2 \mu c \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + (\mu c^2 - R) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + EJ \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = -R v_{,x} v_{,xx} + ES v_{,x} u_{,xx} \quad (91-1)$$

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \mu c \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + (\mu c^2 - ES) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = ES u_{,x} u_{,xx} + (3ES - R) v_{,x} v_{,xx} + EJ v_{,x} v_{,xxxx} \quad (91-2)$$

En prenant en considération les hypothèses stipulées, négligeons donc $u_{,x} u_{,xx}$ par rapport à $v_{,x} v_{,xx}$ et $v_{,x} v_{,xxxx}$; les équations (91-1) et (91-2) prennent la forme simplifiée suivante :



$$\mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2 \mu c \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + (\mu c^2 - R) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + EJ \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = - R v_{,x} v_{,xx} + ES v_{,x} u_{,xx} \quad (92-1)$$

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2 \mu c \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + (\mu c^2 - ES) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (3 ES - R) v_{,x} v_{,xx} + EJ v_{,x} v_{,xxxx} \quad (92-2)$$

L'effort R agissant sur le ruban aura maintenant deux composantes :

- une composante quasi-statique R donnée par la relation (17)
- une composante dynamique due au mouvement vibratoire de l'ensemble de la structure R_3 que l'on déterminera par les conditions aux limites du ruban :

$$T \sin \theta \Big|_{x=1_0} + N \cos \theta \Big|_{x=1_0} = R_3 \quad (93)$$

Les équations définitives du mouvement s'écrivent :

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2 \mu c \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + (\chi \mu c^2 - R_s) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + EJ \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = \\ - (R_s + \eta \mu c^2) v_{,x} v_{,xx} \\ + ES v_{,x} u_{,xx} \end{aligned} \quad (94-1)$$

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2 \mu c \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + (\mu c^2 - ES) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (3ES - R_s - \eta \mu c^2) v_{,x} v_{,xx} \\ + EJ v_{,x} v_{,xxxx} \end{aligned} \quad (94-2)$$

Compte tenu des calculs intermédiaires (88), la relation (93) devient (au 3e ordre près) :

$$R v_{,x}^2 - EJ v_{,xxx} v_{,x} + ES u_{,x} = R_3 \quad (94-3)$$

Dans un souci de simplicité, nous effectuerons le calcul simplifié où les conditions aux limites sont des conditions d'encastrement ; l'équation (94-3) se réduit à :

$$ES u_{,x} = R_3 \quad (94-4)$$

Fondamentalement, rien n'est changé pour le problème.



II. ETUDE DE LA DEUXIEME SOUS-STRUCTURE

Soit $F = F_0 \cos \Omega t$ la force excitatrice agissant sur le système : Ruban, poulie, bâti. Cette force se décompose en deux forces d'intensité R_3 et R_4 agissant respectivement sur le ruban et sur le bâti.

Le système discret a été défini au chapitre III, § I ; l'équation du mouvement sera semblable à l'équation (64) :

$$M \ddot{x} + b \dot{x} + k_s x = R_4 \cos \Omega t \quad (95)$$

cherchons une solution stationnaire :

$$x = P_1 \sin \Omega t + P_2 \cos \Omega t$$

en reportant dans l'équation (95) et en égalant les termes en $\cos \Omega t$ et $\sin \Omega t$, nous obtenons un système dont la résolution est la suivante :

$$P_1 = \frac{R_4 b \Omega}{\Delta_1}$$

$$P_2 = \frac{R_4 (-M \Omega^2 + k_s)}{\Delta_1}$$

$$\text{avec : } \Delta = -b^2 \Omega^2 - (-M \Omega^2 + k_s)^2 = -\Delta_1$$

par conséquent :

$$|x| = \frac{R_4}{\sqrt{\Delta_1}} = \frac{R_4}{\lambda_1} \quad (96)$$

en exprimant x sous la forme $|x| \cos (\Omega t + \emptyset_2)$ et en tenant compte des calculs précédents :

$$\emptyset_2 = -\text{Arc tg} \left[b \Omega / (-M \Omega^2 + k_s) \right] = -\text{Arc tg} (Q_2) \quad (97)$$

III. EXPRESSION DES DEPLACEMENTS D'UN POINT DU RUBAN

L'équation des vibrations longitudinales se déduit de l'équation (94-2) sans second membre :

$$\alpha' \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2 c \alpha' \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (98)$$

en posant :

$$\alpha' = \frac{\mu}{\mu c^2 - ES} \quad (99)$$

Le ruban est soumis à une force sinusoïdale d'intensité R_3 et de pulsation Ω .

Compte tenu de la forme de l'équation (98), cherchons une solution du type :

$$u(x) = u_1(x) \cos \Omega t + u_2(x) \sin \Omega t \quad (100)$$

En reportant cette solution dans l'équation (100), nous établissons une nouvelle équation qui doit être satisfaite quelque soit t ; par suite :

$$u_{1,xx}(x) + 2 c \alpha' \Omega u_{2,x}(x) - \alpha' \Omega^2 u_1(x) = 0 \quad (101-1)$$

$$u_{2,xx}(x) - 2 c \alpha' \Omega u_{1,x}(x) - \alpha' \Omega^2 u_2(x) = 0 \quad (101-2)$$

Résolvons ce système, par élimination des inconnues : tirons $u_{1,x}(x)$ de l'équation (101-2) :

$$u_{1,x}(x) = \frac{u_{2,xx}(x) - \alpha' \Omega^2 u_2(x)}{2 c \alpha' \Omega} \quad (102)$$

et après avoir dérivé (101-1) par rapport à x , nous éliminons $u_{1,xxx}$ et $u_{1,x}(x)$ de la nouvelle équation obtenue :



$$u_{2,xxxx}(x) + 2 \alpha' \Omega^2 (2 c^2 \alpha' - 1) u_{2,xx}(x) + \alpha'^2 \Omega^4 u_2(x) = 0 \quad (102)$$

Sachant que $u_2(x)$ est de la forme : $e^{r'x}$, nous obtenons l'équation caractéristique de l'équation (102) :

$$r'^4 + 2 \alpha' \Omega^2 (2 c^2 \alpha' - 1) r'^2 + \alpha' \Omega^4 = 0$$

en posant $r'^2 = S$:

$$S^2 + 2 \alpha' \Omega^2 (2 c^2 \alpha' - 1) S + \alpha' \Omega^4 = 0$$

le discriminant $4 \alpha'^2 \Omega^4 c^2 (c^2 \alpha'^2 - \alpha')$ est positif car α' est négatif (cf. (99)), les racines R_1 et R_2 sont alors :

$$S_1 = - \alpha' \Omega^2 (2 c^2 \alpha' - 1) \pm [4 \alpha'^2 \Omega^4 c^2 (c^2 \alpha'^2 - \alpha')]^{1/2}$$

l'application numérique nous montre que ces racines R_1 et R_2 sont négatives, soit :

$$S_1 = - d_1^2 \quad \text{et} \quad S_2 = - d_2^2$$

et par conséquent : $r_1 = \pm j d_1$ et $r_3 = \pm j d_2$

$u_2(x)$ s'écrit donc :

$$u_2(x) = A_1' e^{jd_1x} + A_2' e^{-jd_1x} + A_3' e^{jd_2x} + A_4' e^{-jd_2x}$$

soit encore :

$$u_2(x) = c_1 \cos d_1 x + c_2 \sin d_1 x + c_3 \cos d_2 x + c_4 \sin d_2 x \quad (103)$$

$u_1(x)$ s'obtient alors en intégrant la relation (102) après avoir remplacé $u_2(x)$ par (103) et $u_{2,xx}(x)$ par la dérivée seconde par rapport à x de cette relation.

$$u_1(x) = - c_1 \alpha_1 \sin d_1 x + c_2 \alpha_1 \cos d_1 x - c_3 \alpha_2 \sin d_2 x + c_4 \alpha_2 \cos d_2 x \quad (104)$$



avec

$$\alpha_1 = (d_1 + \frac{\alpha_1'^2 \Omega^2}{d_1})/2 \text{ c } \alpha' \Omega \quad \text{et} \quad \alpha_2 = (d_2 + \frac{\alpha_2'^2 \Omega^2}{d_2})/2 \text{ c } \alpha' \Omega$$

Il reste à tenir compte des conditions aux limites suivantes :

$$\left| \begin{array}{ll} u(x) = 0 & \text{pour } x = 0 \\ \text{ES } \frac{\partial u(x)}{\partial x} = R_3 \cos \Omega t & \text{pour } x = l_0 \end{array} \right.$$

nous établissons le système suivant dont la résolution nous conduira à c_1, c_2, c_3 et c_4 .

$$\begin{bmatrix} 0 & \alpha_1 & 0 & \alpha_2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -d_1 \sin d_1 l_0 & d_1 \cos d_1 l_0 & -d_2 \sin d_2 l_0 & d_2 \cos d_2 l_0 \\ -d_1 \alpha_1 \cos d_1 l_0 & -d_1 \alpha_1 \sin d_1 l_0 & -d_2 \alpha_2 \cos d_2 l_0 & -d_2 \alpha_2 \sin d_2 l_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ R_3/\text{ES} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_2 = -\alpha_1 \alpha_2 (d_1^2 + d_2^2) + 2 d_1 d_2 \alpha_1 \alpha_2 \sin d_1 l_0 \cdot \sin d_2 l_0 + d_1 d_2 \cos d_1 l_0 \cdot \cos d_2 l_0 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)$$

et tous calculs faits :

$$\begin{aligned} \Delta_2 u_1(l_0) &= \frac{R_4}{\text{ES}} [(\alpha_1 d_2 - \alpha_2 d_1) (\alpha_1 \cos d_2 l_0 \cdot \sin d_1 l_0 - \alpha_2 \sin d_2 l_0 \cdot \cos d_1 l_0)] = \gamma_1 \frac{R_3}{\text{ES}} \\ \Delta_2 u_2(l_0) &= \frac{R_4}{\text{ES}} [(\alpha_2 d_1 - \alpha_1 d_2) (1 - \cos d_1 l_0 \cdot \cos d_2 l_0) - (\alpha_2 d_2 + \alpha_1 d_1) \sin d_1 l_0 \cdot \sin d_2 l_0] \\ &= \gamma_2 \frac{R_3}{\text{ES}} \end{aligned}$$

et par conséquent :

$$\Delta_2 u(l_0) = \Delta_2 u_1(l_0) \cos \Omega t + \Delta_2 u_2(l_0) \sin \Omega t \quad (105)$$

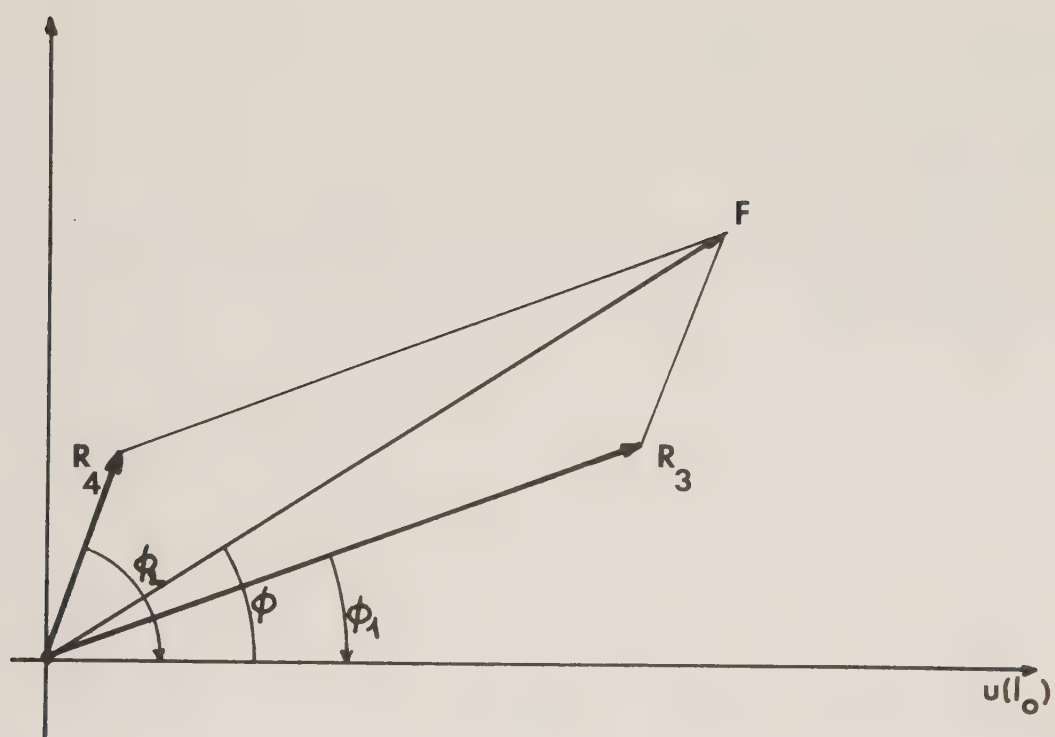


Figure 19

en mettant $u(1_0)$ sous la forme $|u(1_0)| \cdot \cos(\Omega t + \phi_1)$ et en tenant compte des calculs précédents :

$$(106-1) \quad |u(1_0)| = \frac{R_3}{ES \Delta_2} |\gamma_1^2 + \gamma_2^2|^{1/2} = \frac{R_3}{\lambda_2}$$

$$(106-2) \quad \phi_1 = \text{Arc tg} \left| - \frac{(d_1 \alpha_2 + d_2 \alpha_1)(1 - \cos d_1 l_0 \cos d_2 l_0) - (d_2 \alpha_2 + \alpha_1 d_1) \sin d_1 l_0 \sin d_2 l_0}{(\alpha_1 d_2 - d_1 \alpha_2)(\alpha_1 \cos d_2 l_0 \sin d_1 l_0 - \alpha_2 \sin d_2 l_0 \cos d_1 l_0)} \right|$$

IV. CALCUL DE R_3 ET R_4

Les résultats précédents peuvent être illustrés par une construction de Fresnel (fig. 19).

Nous avons entre R_3 , R_4 et F la relation vectorielle suivante :

$$\vec{R}_3 + \vec{R}_4 = \vec{F},$$

le déplacement constitue maintenant la référence de nos angles orientés ; en projetant :

$$R_3 \cos(-\phi_1) + R_4 \cos(-\phi_2) = F_0 \cos \phi \quad (107)$$

$$R_3 \sin(-\phi_1) + R_4 \sin(-\phi_2) = F_0 \sin \phi$$

les déplacements de l'extrémité du ruban : $u(1_0)$ (106-1) et du bâti (98) sont égaux :

$$\frac{R_4}{\lambda_1} = \frac{R_3}{\lambda_2} \quad \text{soit } R_3 = \lambda R_4 \quad \text{avec } \lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \quad (108)$$

en tenant compte des relations (107) et (108), nous pouvons déterminer ϕ le déphasage de F par rapport à $u(1_0)$:

$$\phi = \text{Arc tg} \frac{-\lambda \sin \phi_1 - \sin \phi_2}{\lambda \cos \phi_1 - \sin \phi_2} \quad (109)$$

Connaissant ϕ , nous pouvons déterminer R_3 , à partir des relations (107) :



$$R_3 = \frac{\lambda F_0}{[\lambda^2 + 2 \lambda \cos (\phi_1 + \phi_2) + 1]^{1/2}} \quad (110)$$

nous avons une expression approchée de R_3 , c'est-à-dire de l'intensité de l'effort agissant sur le ruban de scie.

V. INTERPRETATION PHYSIQUE DES EQUATIONS (92) OU (94)

V.1. DETERMINATION DES VIBRATIONS LONGITUDINALES PROPRES

Nous remarquons que l'équation (98) est formellement analogue à l'équation du mouvement d'une corde parfaitement flexible (Ch.III § 320). Il est intéressant de déterminer les pulsations propres des vibrations longitudinales en ayant recours à la même méthode de résolution qu'au chapitre II (§ 320).

En choisissant une solution de la forme : $u(x,t) = e^{st+qx}$, nous obtenons donc :

$$s_n' = j \frac{n\pi}{l_0 (c_{\alpha'}^2 - \alpha')^{1/2}} \quad (111)$$

l'application numérique montre que les pulsations propres des vibrations longitudinales sont très éloignées de celles des vibrations transversales.

i	1	2	3	4
s_i' rad/s	5537,98	11075,97	16613,95	22151,94

V.2. OBSERVATIONS ET DISCUSSION

Pour faciliter la discussion, il est fondamental de pouvoir connaître les termes prépondérants dans les équations (94) ; pour ce faire, nous diviserons respectivement les équations (94-1) et (94-2) par $(\chi \mu c^2 - R_s)$ et $(\mu c^2 - ES)$:



$$\alpha \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2 c \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = - \varepsilon_3 v_{,x} v_{,xx} + \varepsilon_4 v_{,x} u_{,xx} \quad (112-1)$$

$$\alpha' \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2 c \alpha' \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varepsilon_5 v_{,x} v_{,xx} + \varepsilon_6 v_{,x} v_{,xxxx} \quad (112-2)$$

Ordre de grandeur des coefficients :

ε_3 est voisin de 1 et ε_5 voisin de 3 ;

ε_6 est très petit mais ε_4 est important (~ 1500).

1) Un simple examen des deux équations (94) nous montre qu'elles sont couplées ; ce couplage apparaît nettement ; en fait, le couplage apparaît au 3ème ordre en ce qui concerne les vibrations transversales et au 4ème ordre en ce qui concerne les vibrations longitudinales.

2) En ne prenant pas en considération les vibrations longitudinales, une comparaison entre les équations (9) et (92-1) relatives aux vibrations transversales nous permet de remarquer un terme supplémentaire ($R v_{,x} v_{,xx}$) dans l'équation (92-1) ; ce terme qui introduit évidemment une non-linéarité, peut être considéré comme un terme correctif de l'équation (9) ; et s'il n'est pas apparu dans cette dernière, c'est qu'en établissant la relation entre le moment fléchissant et le rayon de courbure, nous n'avons utilisé qu'une formule approchée.

3) Le second membre de (112-2) comporte des termes dont l'ordre est au moins égal à v^2 ($v_{,x} v_{,xx}$ et $v_{,x} v_{,xxxx}$) ; nous retrouvons ici un résultat très classique de l'étude des poutres : un mouvement longitudinal de pulsation $2 \omega_1$ entraîne un mouvement vibratoire transversal de pulsation ω_1 et réciproquement. Compte-tenu de l'harmonicité des fréquences transversales du ruban (ch. III), des ennuis sont à craindre en ce qui concerne le mouvement longitudinal.

4) Enfin, nous pouvons remarquer certaines similitudes entre les équations (94-1) et (70).



Nous ne reprendrons pas le raisonnement mené au chapitre III, étant donné le peu de changement fondamental qui existe entre les chapitres IV et III ; le chapitre IV doit tout de même nous mettre en garde pour le cas particulier où nous serions au voisinage d'une pulsation propre longitudinale.

En revanche, ce chapitre nous permet de corriger l'équation des vibrations transversales établie aux chapitres II et III.



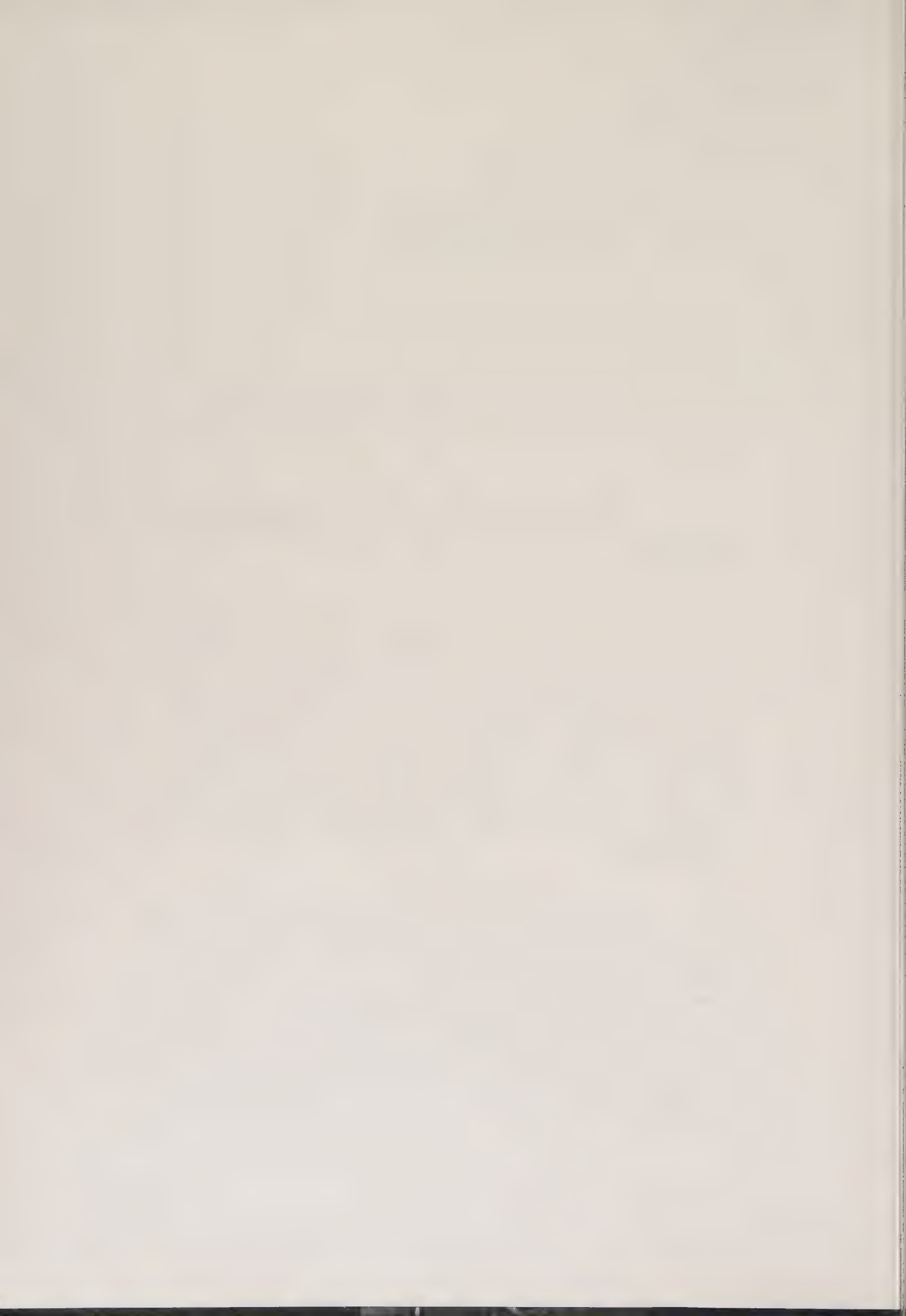
C O N C L U S I O N

Nous avons mis en évidence dans ce travail les problèmes dynamiques posés par le fonctionnement des scies à ruban.

L'étude des vibrations a été menée d'une manière progressive, en complétant à chaque étape le modèle mathématique proposé :

Le premier modèle envisagé au chapitre II introduit la raideur du ruban comme perturbation singulière dans l'équation des fils parfaitement flexibles entraînés en translation. Nous avons proposé deux approches de solution, la première faisant appel à la méthode de Galerkin généralisée, la seconde à une méthode d'approximation. Nous avons constaté que les valeurs propres étaient purement imaginaires et harmoniques et que les déformées correspondantes présentaient des quasi-noeuds.

Dans le chapitre III, nous avons tenu compte en plus de l'influence du bâti. Si les résultats précédents ne sont pas fondamentalement changés, nous avons établi la possibilité de résonance de la lame, sous certaines conditions de fonctionnement. Il semble qu'un amortissement important soit souhaitable au niveau de la raideur du bâti, ce qui n'est pas le cas habituellement et peut expliquer le bruit important des scies montées sur bâtis mécano-soudés.



Enfin, nous avons tenu compte du couplage entre les vibrations transversales, les vibrations longitudinales du ruban et celles du bâti, en prenant en compte l'expression complète du rayon de courbure et la déformée instantanée du ruban. Nous n'avons pas constaté de différence fondamentale avec les études précédentes, hormis le fait que certaines résonances sont facilitées par l'apparition des vibrations longitudinales.

Cette étude laisse prévoir les 2 points suivants :

- 1) étant donné la petitesse des vibrations transversales lorsqu'elles se produisent, ces vibrations ne peuvent pas être la cause du défaut de rectitude du trait de scie observé parfois.
- 2) lorsque la machine est en bon état (poulies rectifiées et équilibrées, courroies tendues correctement...), nous sommes persuadés que les défauts de sciage sont dus alors à un mauvais "affûtage" (planage, tensionnage, dressage) et nous pouvons reprendre ce vieil adage des scieurs : "l'affûtage, c'est l'âme de la scierie [19] .

Par conséquent, ce travail devrait être poursuivi dans les deux directions suivantes :

- Etude cinématique du ruban sur les poulies.
- Etude élasto-plastique du ruban afin d'appréhender le tensionnement et la "stabilité".

Enfin, si la genèse de ce travail était initialement l'étude vibratoire des scies à ruban, il est bien évident que les résultats obtenus pourront être appliqués à d'autres structures mécaniques comportant, par exemple des courroies de transmission (Machines-Outils, Transporteurs, etc...)



ANNEXE I



*Nous remercions la Compagnie GILLET-GUILLIET-
RENNEPONT pour son amabilité à nous communiquer les carac-
téristiques de son matériel et à nous avoir reçus à la
Société HOUOT à GERARDMER pour nous présenter une scie
à ruban (type 1800).*



	ε		
χ	1	0,5	0
MODELE			
1100	$-9,858.10^{-5}$	$-9,549.10^{-5}$	$-9,258.10^{-5}$
1300	$-1,691.10^{-4}$	$-1,625.10^{-4}$	$-1,564.10^{-4}$
1400	$-1,961.10^{-4}$	$-1,885.10^{-4}$	$-1,814.10^{-4}$
1600	$-2,582.10^{-4}$	$-2,471.10^{-4}$	$-2,370.10^{-4}$
1800	$-3,296.10^{-4}$	$-3,141.10^{-4}$	$-2,999.10^{-4}$
2100	$-4,487.10^{-4}$	$-4,275.10^{-4}$	$-4,083.10^{-4}$
2400	$-5,382.10^{-4}$	$-5,128.10^{-4}$	$-4,897.10^{-4}$

Valeurs de ε pour différents modèles.



	α		
χ	1	0,5	0
MODELE			
1100	$-4,732.10^{-5}$	$-4,583.10^{-5}$	$-4,444.10^{-5}$
1300	$-4,803.10^{-5}$	$-4,616.10^{-5}$	$-4,444.10^{-5}$
1400	$-4,803.10^{-5}$	$-4,616.10^{-5}$	$-4,443.10^{-5}$
1600	$-4,842.10^{-5}$	$-4,634.10^{-5}$	$-4,443.10^{-5}$
1800	$-4,883.10^{-5}$	$-4,653.10^{-5}$	$-4,443.10^{-5}$
2100	$-4,883.10^{-5}$	$-4,653.10^{-5}$	$-4,443.10^{-5}$
2400	$-4,883,10^{-5}$	$-4,653.10^{-5}$	$-4,444.10^{-5}$

Valeurs de α pour différents modèles.

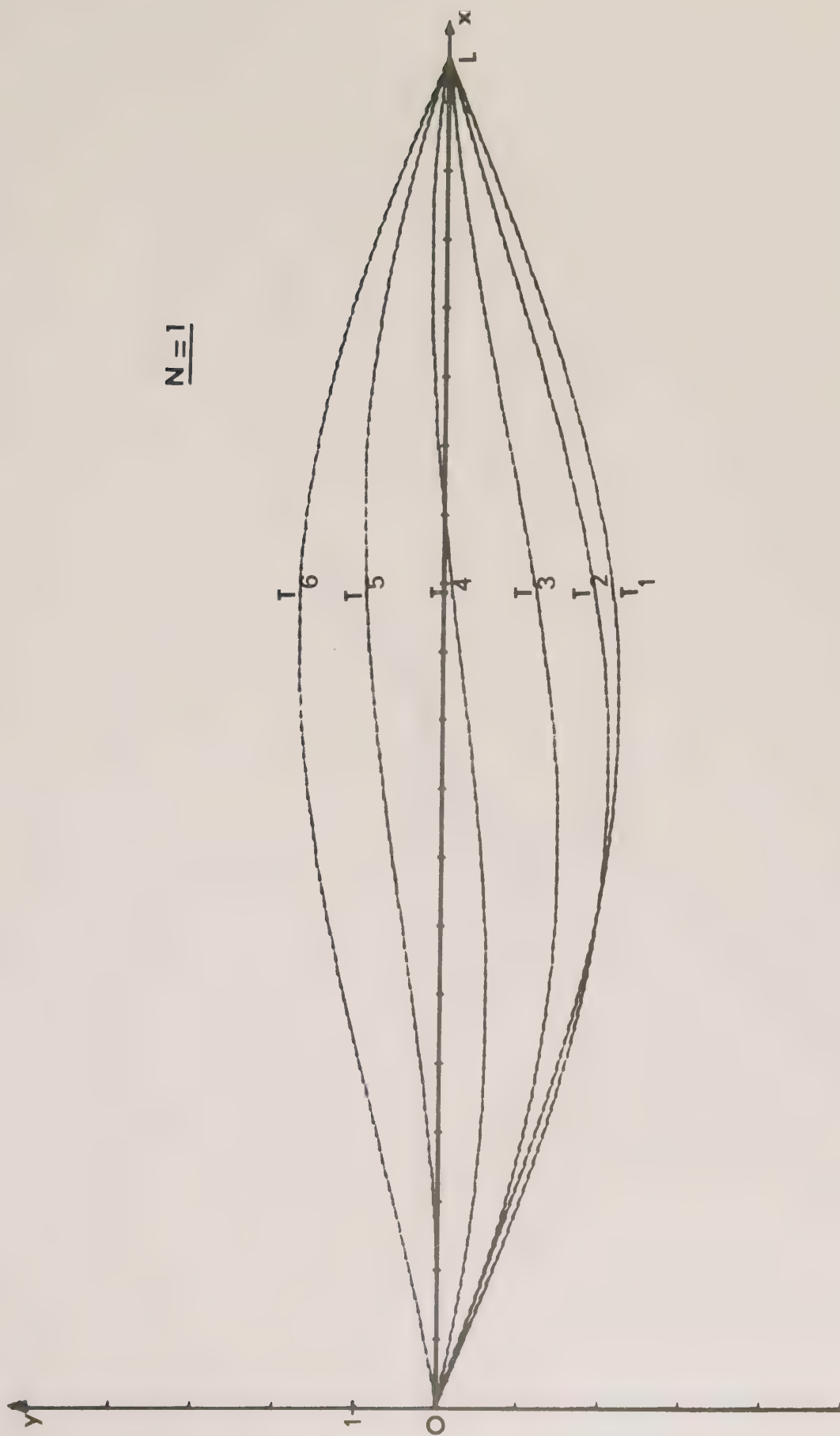
Date		Description		Amount	
1890	Jan 1	Balance		100.00	
	Feb 1	Received from A. B.		50.00	
	Mar 1	Received from C. D.		25.00	
	Apr 1	Received from E. F.		75.00	
	May 1	Received from G. H.		100.00	
	Jun 1	Received from I. J.		150.00	
	Jul 1	Received from K. L.		200.00	
	Aug 1	Received from M. N.		250.00	
	Sep 1	Received from O. P.		300.00	
	Oct 1	Received from Q. R.		350.00	
	Nov 1	Received from S. T.		400.00	
	Dec 1	Received from U. V.		450.00	
	Total			2000.00	

Received of the Treasurer of the

of the

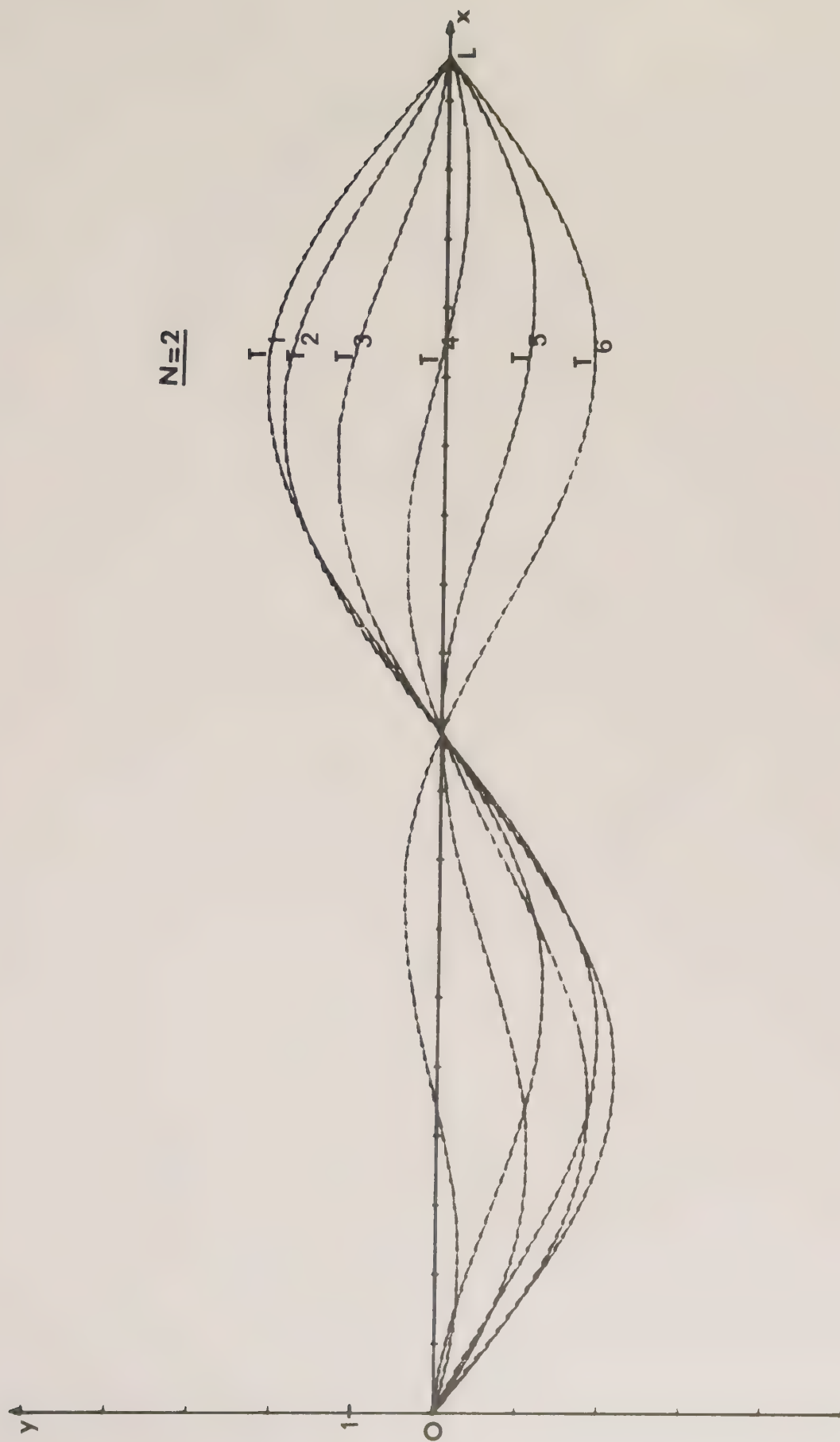
ANNEXE II



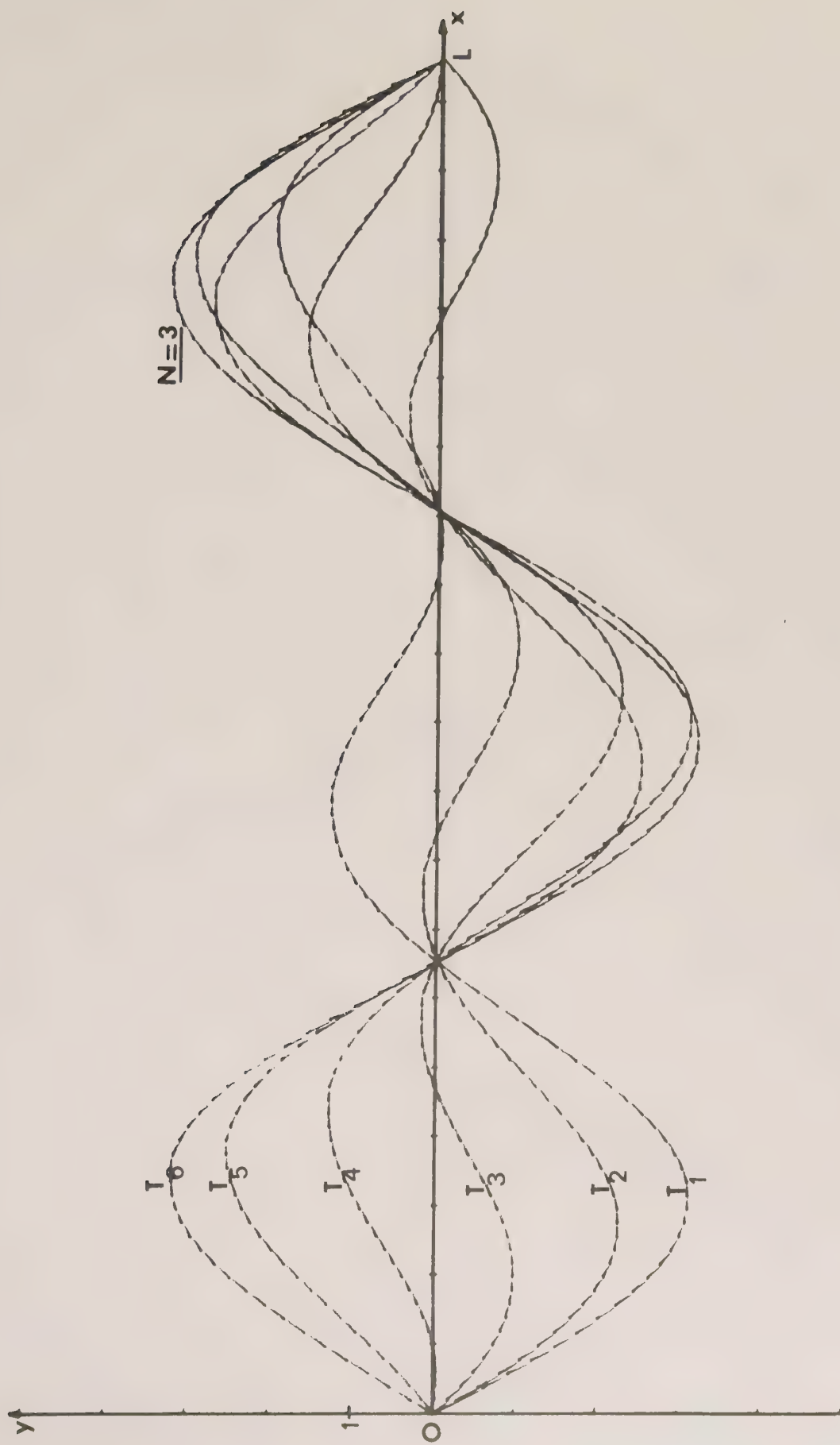


$\overline{N=1}$



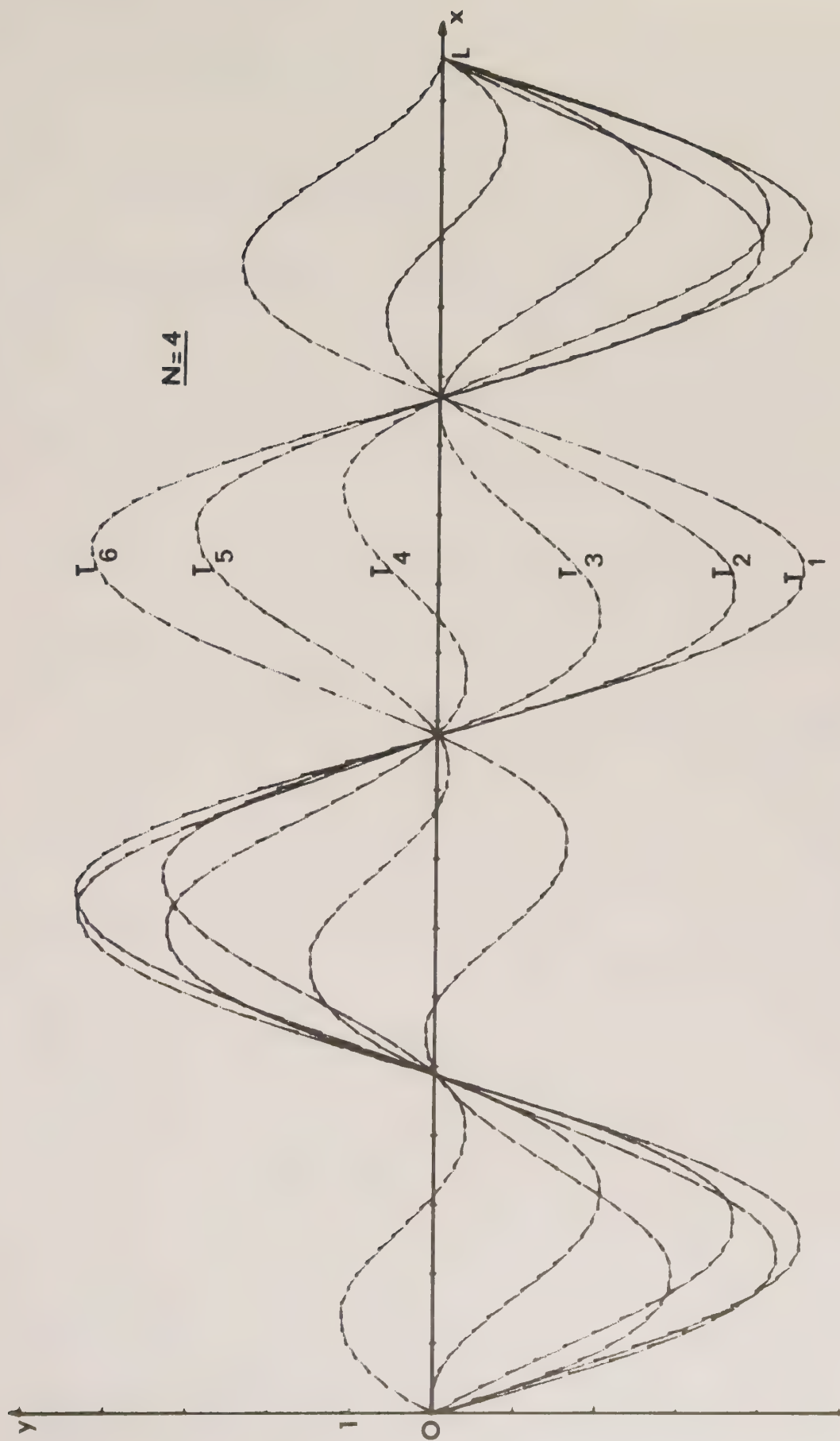


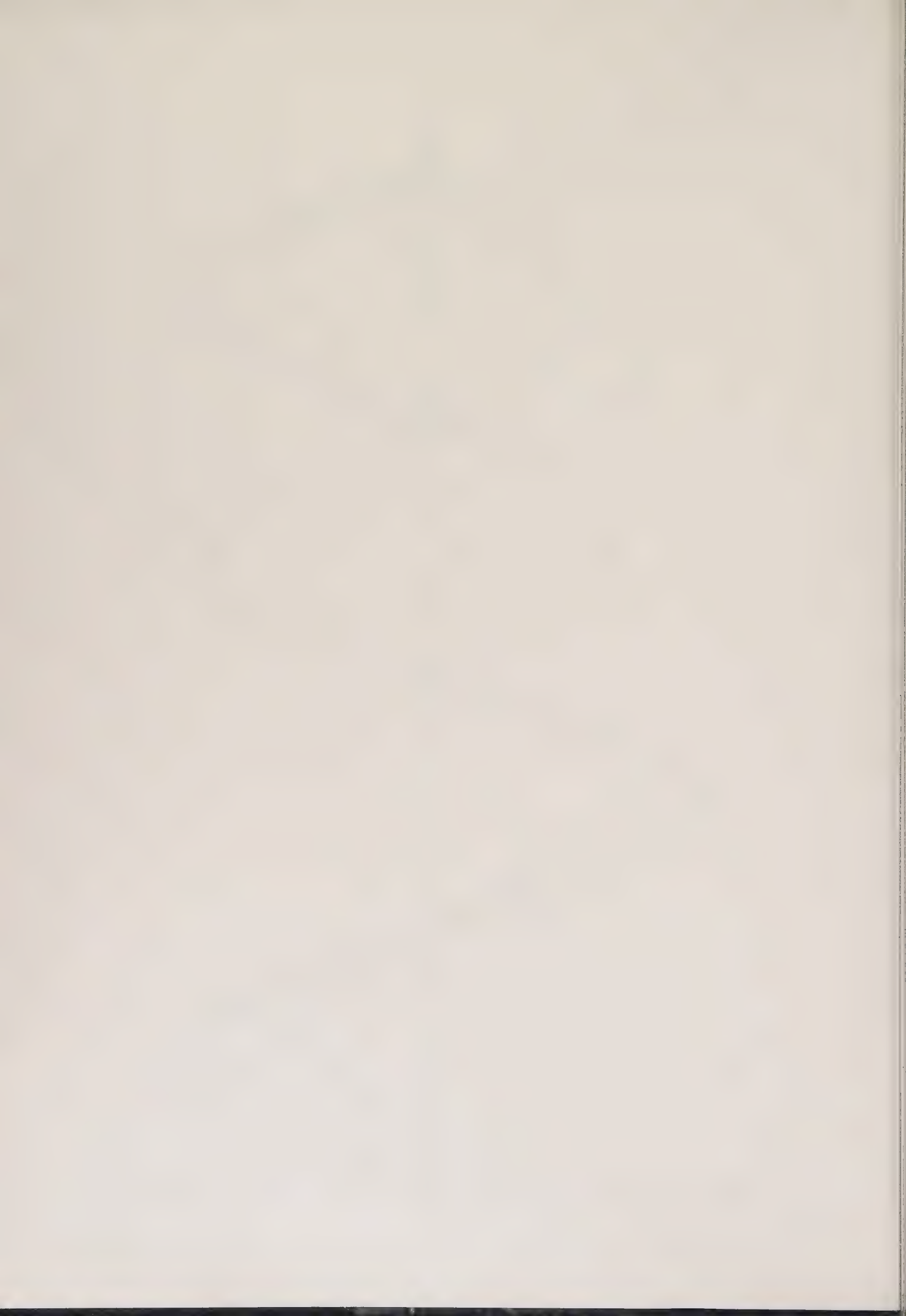




$N=3$







B I B L I O G R A P H I E

O U V R A G E S G E N E R A U X

- I DRAWIN H.W. Phénomènes de vibration et de propagation
 Eyrolles 1975
- II GOLDSTEIN H. Mécanique classique PUF 1964
- III JULLIEN Y. Vibration des systèmes élastiques
 Naturalia Biologia 1971
- IV LEECH J.W. Eléments de mécanique analytique
 Monographies Duriod 1961
- V LOVE A.E.H. A Treatise on the Mathematical Theory of
 Elasticity
 Cambridge at the University Press
 1927
- VI LUR'E L. Mécanique analytique
 Masson 1968
- VII NOWACKI W. Dynamics of Elastic Systems
 Chapman and Hall LTD 1963
- VIII PERES J. Mécanique générale
 Masson 1962
- IX VOGEL T. Les fonctions orthogonales dans les problèmes aux
 limites (1953)



CLASSEMENT ONOMASTIQUE

- A -

- | | | |
|----|-------------------------------------|---|
| 1 | ABEELS P. | "Contribution to the study of Bandsaw Behavior During Sawing" IUFRO
Mech. Conversion Wood Proc., Sec. 41 pp 53-66 (1970) |
| 2 | ABEELS P. | "Effect of Tensioning treatment on cutting force and Blade behavior during sawing operations"
Proceedings, Meeting Section 41, Sawing and Machining, IUFRO, Melbourne 1965 |
| 3 | ADLER A.A. and REISMANN H. | "Moving loads on an Elastic Plate Strip"
J. Appl. Mech. Trans. ASME, <u>41</u> , pp 713-718 (1974) |
| 4 | ALLEN F.E. | "The Merits of the High Strain Bandmill"
Forest Ind. Rev. <u>4</u> (2), pp 9-15 (1972) |
| 5 | ALLEN F.E. | "High Strain / Thin Kerf. Modern Sawmill Techniques"
Proc. First Sawmill Clinic, Portland, OR, pp 167-181 (Feb. 1973) |
| 6 | ALLEN F.E. | "Some Considerations in Machining Southern Hardwoods with Multiple Band-Saws" FPRS Separate No. MS-75-S55 (1975) |
| 7 | ALLEN F.E. | Part one : "Some Considerations of Bandmill Feeds, Speeds, Design".
Part two : "Some Considerations in Rolls Tensionning Bandsaw Blades", Proc. Lumber Manufacturing Conf. Seattle, W A, pp 1-24 (Nov. 1976) |
| 8 | ALPAUGH D.W. | "Torsional vibration of a Moving Band"
J. Franklin Int. <u>283</u> (4), pp 328-338 (1967) |
| 9 | ANDERSON D.L. | "Natural Frequency of Lateral Vibrations of a Multiple Span Moving Bandsaw" Canada West, Forest product, Lab. (Jan. 1974) |
| 10 | AMES W.F., LEE S.Y. and ZAISER J.N. | "Non-linear Vibration of a Travelling Threadline"
J. Non-linear Mech. <u>3</u> , pp 449-469 (1968) |
| 11 | AOYAMA T. | "The Effect of Feeding and Cutting Speed to the Heat Generation on saw Tooth" J. Jap. Wood Res. Soc. <u>16</u> (8) pp 370-381 (1958) |
| 12 | AOYAMA T. | "Tensioning of Bandsaw Blades by Rolls
I : Calculation of Crown, II : Calculation of Tension
J. Jap. Wood Res. Soc. <u>16</u> (8) pp 370-381 (1970) |



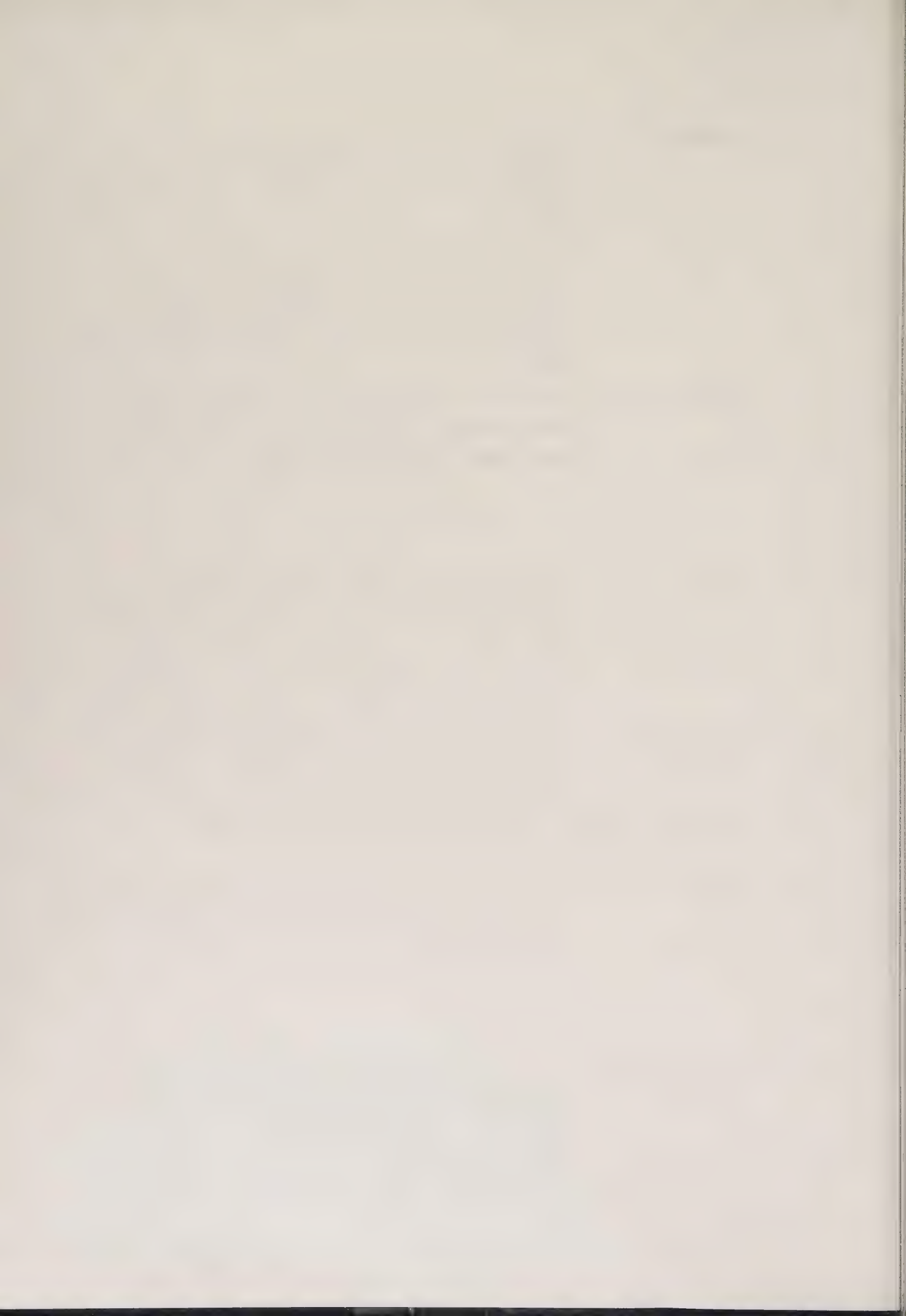
- | 13 | AOYAMA T. "Tensioning of Bandsaw Blades by Rolls,
III: Effect of Saw Blade Thickness, IV : Effect of Saw
Blade Width" J. Jap. Wood Res. Soc. 17 (5) pp 188-202
(1971)
- | 14 | AOYAMA T. "Tensioning of Bandsaw Blades by Rolls,
V : The Effects of Rolling Repetition, Saw Blades
Hardness, and Rolls with Different Sectional
Diameters" J. Jap. Wood Res. Soc. 20 (11), pp 523-527
(1974)
- | 15 | ARCHIBALD F.R. and EMSLIE A.G. "The Vibration of a String Having
Uniform Motion Along Its length", J. Appl. Mech.
Trans. ASME, 25 pp 347-348 (1958)

- B -

- | 16 | BERLIN E.P. "Experimental Investigations of the Effect of
Aerostatic Guides on the Transverse Stability of a
Bandsaw Blade" Lesn. Zh., 12 (2) pp 85-87 (1969)
- | 17 | BIOT M.A. "Increase of Torsional Stiffness of a Prismatical
Bar Due to Axial Tension".
J. Appl. Phys. Vol. 10 n° 12 pp 860-884 (Dec. 1939)
- | 18 | BIRKELAND R. "Results of Measurements of the Sawing Accuracy
of Circular Sawmills and Bandmills".
Norsk Skogindustri, 22 (6) pp 192-211 (1968)
- | 19 | BOISSEAU et BECHET. "Cahiers du Centre Technique du Bois"
(Juin 1956)
- | 20 | BREZNJAK M. and MOEN K. "On the Lateral Movement of the Bandsaw Blade
under Various Sawing Conditions" Norsk Treteknisk Int.
Rept. n° 46 (1972)

- C -

- | 21 | CHO H.S., MOTE C.D. Jr. "Aerodynamically Induced Vibration and Noise
in Circular Saws" Proc. Wood. Mach. Sem. Univ. Cal.
Forest Prod. Lab. pp 207-245 (1977)
- | 22 | CHARDIN A. "Ruban à grumes vertical, horizontal ou incliné".
Bois et forêts tropicales. Fr. (1960) n° 74, 51-5



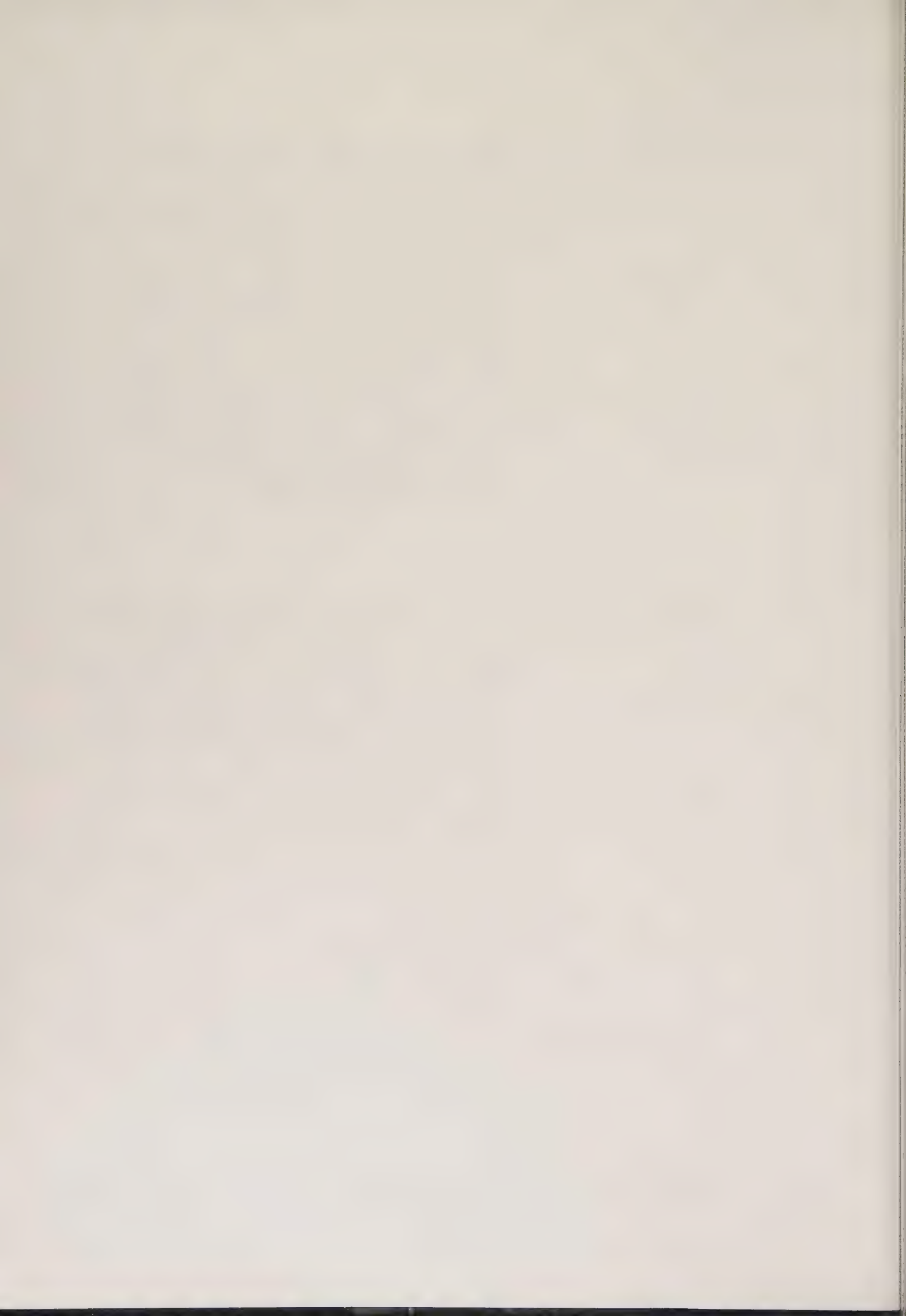
- | 23 | CHARDIN A. "Stabilité des lames de scies alternatives"
Bois et forêts trop. Fr. (1962)
- | 24 | CHONAN S. "Critical Velocity of a Load Moving on a Beam
Supported by an Elastic Stratum" Bull. JSME
19 (132) pp 604-609 (1976)
- | 25 | CHUBACHI T. "Lateral Vibration of Axially Moving Wire or
Belt Form Materials" Bull. JSME, 1 (1),
pp 24-29 (1958)
- | 26 | CLARK F. "High Strain Bandmills" Proc. Forest Prod.
Res. Soc. North Cal. Sec. pp 2-5 (1969)
- | 27 | COLLATZ L. "The numerical treatment of differential
equation" Springer Verlag Berlin
Göttingen Heideiberg (1960)

- D -

- | 28 | DOBRYNIN E.D. "Stresses in Bandsaw Blades Resulting from
the Forces of Resistance to Cutting and
Compression" Lesn. Zh. 13 (2), pp 83-88 (1970)
- | 29 | DOGARU V. "General Relations for Calculing the Dynamic
Constants for Sawing Wood by Bandsaw" Ind.
Lem. 20 (4) pp 121-125 (1969)
- | 30 | DOI O. "Heat Tensioning of Band Saw Blades" Bull.
JSME 67 (551) pp 1838-1848 (1964)
- | 31 | DOI O. "STRETCHING of band blade by utilising thermal
strain". Mem. Fac. Engng. Hokkaido Univ. 11 n° 7
651-71 (1966)
- | 32 | DOI O. and KUNO R. and YAMASHITA Y. "Tensionnement d'une lame de scie
à ruban " 10 rapports.
- | 33 | DOI O. and KUNO R. and YAMASHITA Y. "Théorie de la stabilité de marche
d'une scie à ruban à double denture (3 rapports)
- | 34 | DOYLE E. and HORNUNG K.G. "Lateral Vibration of V-Belts", ASME Paper
n° 69 - VIBR - 29 (1969)

- E -

- | 35 | EKLUND U. "The Daylight Gap as a Mesure for the Tensioning
of Bandsaw Blades", Svenskq Traforskningsinstitut
Rept. No. 227 (A) (1972)



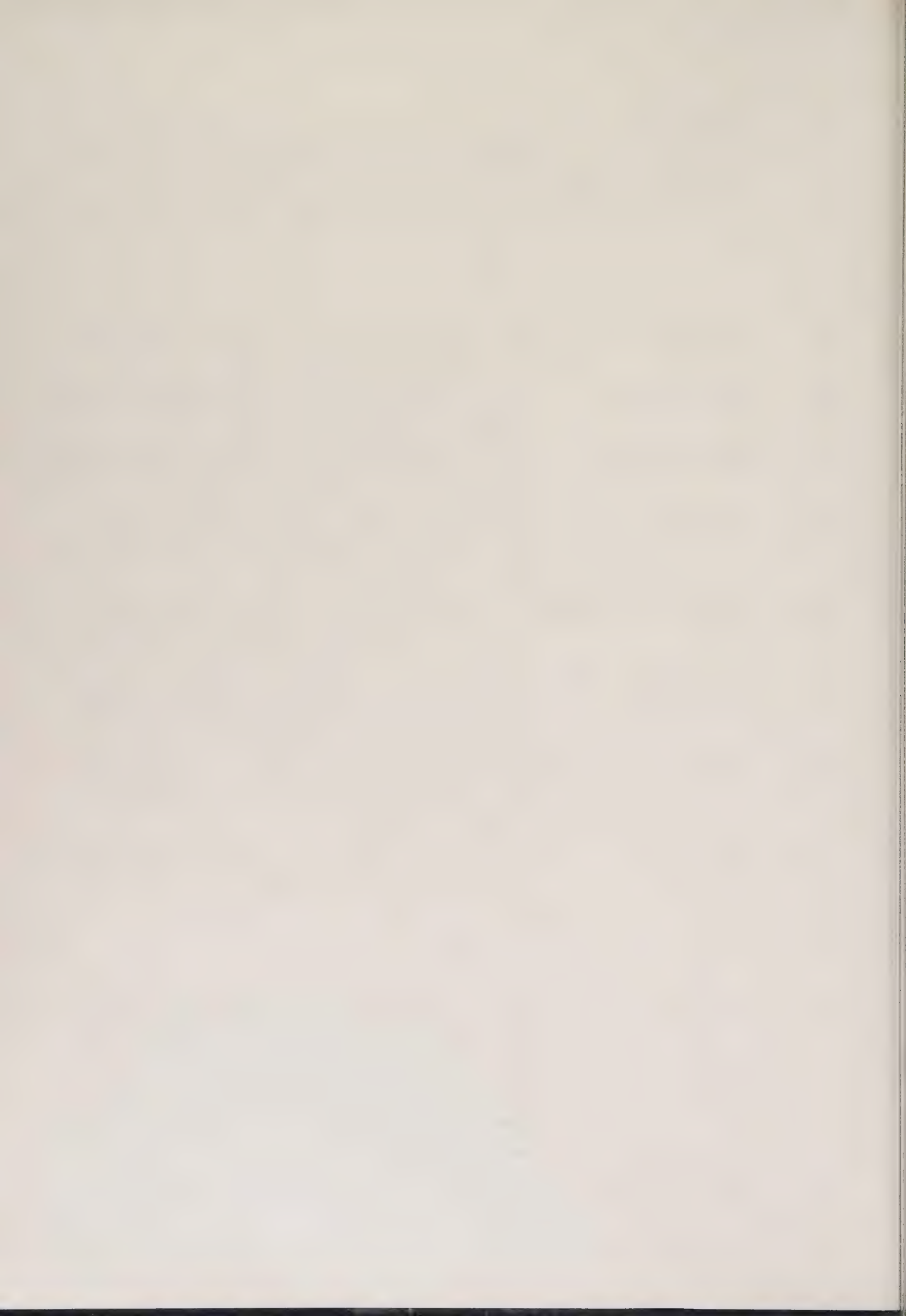
- | 36| EKLUND U. "Pressure Guides at Timber Receiving Bandsaws",
Svenskq Traforskningsinstitut Rept. No. 224 (1974)
- | 37| ELLIS R.W. and MOTE C.D. Jr. "A Feedback Vibration Controller for
Circular Saws". Proc. JACC. pp 1193-1199 (1977)

- F -

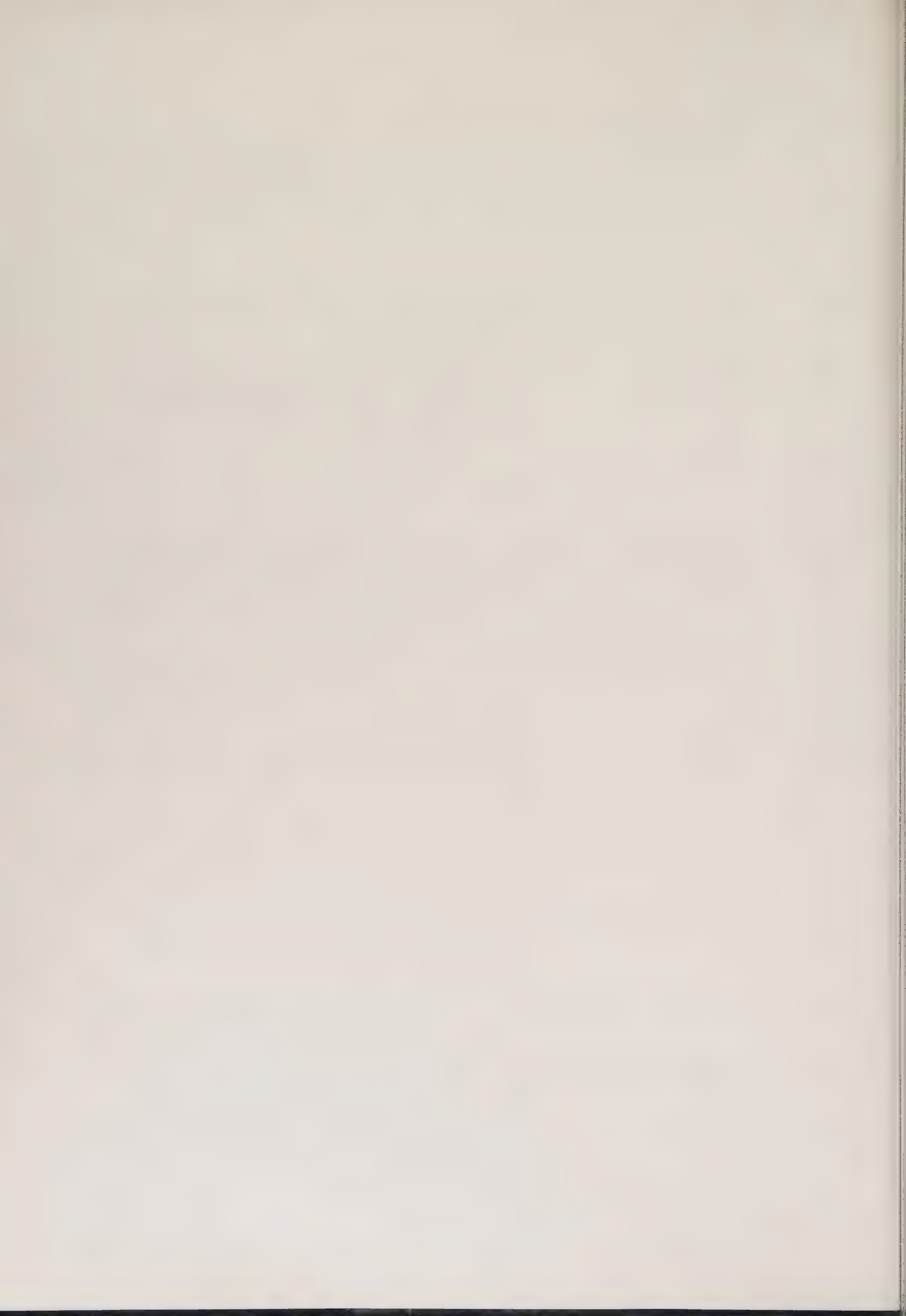
- | 38| FEOKTISTOV A.E. "The stability of Sawblades under Feed Pressure",
Lesn. Zh, 3 (3), pp 95-106 (1960)
- | 39| FEOKTISTOV A.E. "Ursachen von Einrissen beim Bandsägblättern Intern",
Holzmarkt, 53 (13) pp 7-11 (1962)
- | 40| FEOKTISTOV A.E. "Die Jeistungsfakigkeit von Trennband-Rägemaschinen",
Holztechnologie, 5 (4), pp 259-258 (1964)
- | 41| FLAHERTY F.T. Jr. "Transient Resonance of an Ideal String Under a
Load. Moving with Varying Speed", Intl. J. Solids,
Struc. 4, pp 1221-1231 (1968)
- | 42| FORRESTAL M.J., BICKEL D.C., SAGARTZ M.J. "Motion of a Stretched Cable
with small-Curvature Carrying an Accelerating Mass",
AIAA J., 13 (11), pp 1533-1535 (1975)
- | 43| FOSCHI R.O. "The Light Gap Teclinique as a Tool for Measuring
Residual Stresses in Bandsaw Blades", Wood Sci.
Technol. 9, pp 243-255 (1975)
- | 44| FOSCHI R.O. and PORTER A.W. "Lateral and Edge Stability of High Strain
Bandsaws" Canada West. Forest Prod. Lab. Rept.
No. VP-X-68 (1970)
- | 45| FRYBA L. "Vibrations of Solids and Structures under Moving
Loads" Noordhoff. Intl. (1972)

- H -

- | 46| HAAG J. "Sur les vibrations des fils élastiques et des
fils parfaits". Ann. Scient. de l'Ecole Normale
Sup. "Sur l'hypothèse des fibres dans la théorie
des fils élastiques". Ann. Scient. de l'Ecole
Normale Sup. "Théorie des fils élastiques". Journal
des mathématiques pures et appliquées (1948)
- | 47| HARRIS P. "Mechanics of Sawing, Band and Circular Saws"
Forest. Prod. Res. Bull. No. 30, HMSO, London (1953)



- |48| HSU T.R. and TRASI S.R. "On the Analysis of Residual Stresses introduced in Sheet Metals by Thermal Shock Treatment", J. Appl. Mech. Trans. ASME. 43 pp 117-123 (1976)
- J -
- |49| JONES D.S. "Gullet bracking in Saws" Australian Timber J. 31 (7) pp 22-25 (1965)
- |50| JONES D.S. "A Psychiatric Examination of a Bandsaw - or why a Bandsaw Cracks", Australian Timber J. pp 63-69 (June 1968)
- K -
- |51| KANTOROVITCH et KRYLON V.I. "Approximate methods of Higher analysis"
- |52| KHARRAT B.N. "Contribution à l'application des méthodes des perturbations dans la résolution des problèmes aux valeurs propres (1979)
- |53| KIM Y.I. and TABARROK B. "On the Nonlinear Vibration of Travelling Strings", J. Franklin Inst. 293 (6), pp 381-399 (1972)
- |54| KIRBACH E. "A Survey of Sawing Technology in Western Canada", Canada West, Forest Prod. Lab. Rept. No VP-X-124 (1974)
- |55| KIREACH E. and BONAC T. "The Effect of Tensioning and Whell Tilting on the Torsional and Lateral Fundamental Frequencies of Bandsaw Blades". Wood and Fiber (in press).
- |56| KIRBACH E. and BONAC T. "An Experimental Study on the Lateral Natural Frequency of Bandsaw Blades" Wood and Fiber (Submitted for publ.)
- |57| KITAYAMA S. and SUGIHARA M. "On Noise Analysis of a Bandsaw Machine", J. Jap. Wood Res. Soc. 14 (3) pp 140-147 (1968)
- |58| KOLLMAN F. and COTE W. Jr. "Principles of Wood Science and Technology" Vol. I. Springer Verlag. pp 486-490 (1968)
- |59| KRILOV A. "Einige Aspekte der Konstruktion von Bandesägemaschinen mit hoher Blattspannung", Holztechnologie, 16 (2), pp 109-111 (1975)

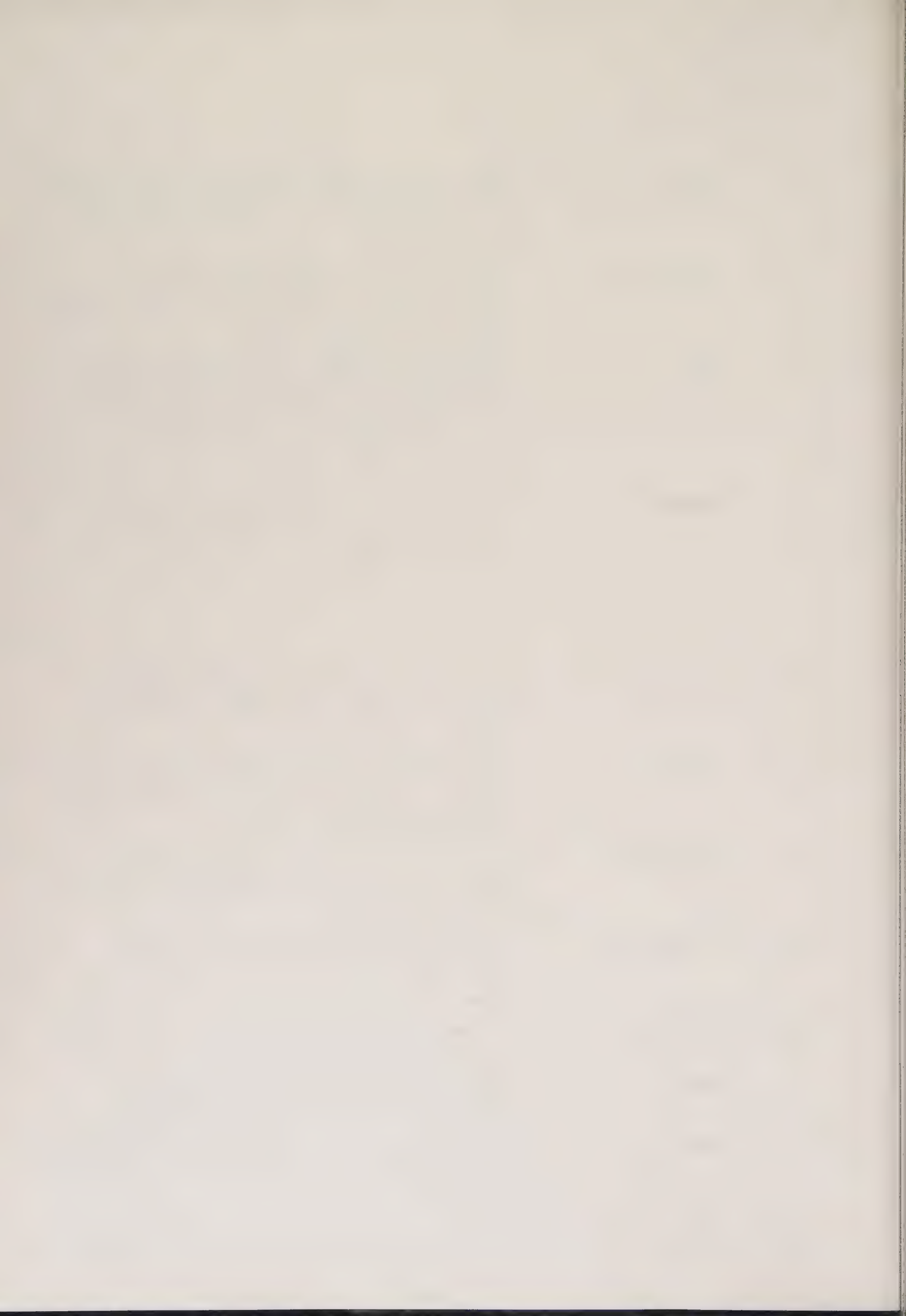


- L -

- | 60 | LABRA J.J. "The Axially Stressed LIM Reaction Rail Subjected to a Moving Load". Intl. J. Solids Struc. 10, pp 115-117 (1974)
- | 61 | LAURENT A. St. "Effect of Induced Lateral Vibration of a Saw Tooth on the Cutting of Wood". Forest Product Journal 15 (1965)3pp 113-116
- | 62 | LAI J. and CHEN C.H. "Vibration and Dynamic Stability of an Axially Moving Belt", ASME Paper No 71-VIBR-31 (1971)
- | 63 | LIV H.S. and MOTE C.D. Jr. "Dynamic Response of Pipes Transporting Fluids", J. Engr. Indus. Trans. ASME, 96 pp 591-596 (1974)
- | 64 | LOMBARDI J. "La scie à ruban : un problème cinématique et statique" Schweizerische Bauzeitung 72 (25) pp 359-363 (1954)

- M -

- | 65 | MAHALINGAM S. "Transverse Vibrations of Power Transmission Chains", British J. Appl. Phys. 8 pp 145-148 (1957)
- | 66 | MAZOYER M.J. "Minimisation de masse et amélioration des performances dynamiques ou statiques des structures axisymétriques minces (1978)
- | 67 | MEIROVITCH L. "A stationary Principle for the Eigenvalue Problem for rotating structures", AIAA Journal Vol. 14 n° 10 (1975)
- | 68 | MIRANKER W.L. "The Wave Equation in a Medium in Motion", IBM J. Research Development, 4 (1), pp 36-42 (1960)
- | 69 | MOTE C.D. Jr. "A Study of Bandsaw Vibrations", J. Franklin Inst. 279, (6), pp 430-444 (1965)
- | 70 | MOTE C.D. Jr. "Some Dynamic Characteristics of Bandsaws", Forest Prod. J., 15 (1) pp 37-41 (1965)
- | 71 | MOTE C.D. Jr. "On the Nonlinear Oscillations of an Axially Moving String", J. Appl. Mech. Trans. ASME, 33 p 463 (1966)
- | 72 | MOTE C.D. Jr. "Dynamic Stability of an Axially Moving Band", J. Franklin Inst. 285 (5) pp 329-346 (1968)



- | 73 | MOTE C.D. Jr. "Divergence Buckling of an Edge-Loaded Axially Moving Band" Intl. J. Mech. Sci. 10 pp 281-295 (1968)
- | 74 | MOTE C.D. Jr. "Parametric Excitation of Axially Moving String", J. Appl. Mech., Trans. ASME, 35 (1), pp 171-172 (1968)
- | 75 | MOTE C.D. Jr. "Dynamic Stability of Axially Moving Materials", Shock Vib. Dig. 4 (4) pp 2-11 (1972)
- | 76 | MOTE C.D. Jr. "Stability and Systems Transporting Accelerating Axially Moving Materials", J. Dyn. Syst. Meas. and Control, Trans. ASME, 97, pp 96-98 (1975)
- | 77 | MOTE C.D. Jr. and Holyen S. "Feedback Control of Circular Saw Temperature Using Induction Meeting", J. Engr. Indus., Trans. ASME (in press)
- | 78 | MOTE C.D. Jr. and NAGULESWARAN S. "Theoritical and Experimental Bandsaw Vibrations", J. Engr. Indus. Trans. ASME, 88, pp 151-156 (1966)
- | 79 | MOTE C.D. Jr. and THURMAN A.L. "Oscillation Modes of an Axially Moving Material", J. Appl. Mech. Trans. ASME, 38 pp. 279-280 (1971)
- | 80 | MOTE C.D. Jr and SZYMANI R. "Principal Developments in Thin Circular Saw Vibration and Control Research Part 1 : Vibration of Circular Saws", Holz. Roh-Werkstoff, 35 (5), pp 188-196 (1977)
- | 81 | MOTE C.D. Jr. and SZYMANI R. "Circular Saw Vibration Research", Stock Vib. Dig. 10 (6), pp 15-30 (June 1978)
- | 82 | MOUSTAFA M.A. and SALMAN F.K. "Dynamic properties of a Moving Threadline", J. Engr. Indus. Trans. ASME, 98 pp 368-378 (1976)
- | 83 | MOVCHAN A.A. "On one Problem of Stability of a Pipe with a Fluid Flowing-through It", Prikladnaya Matematika I Mekhanika, 29 (4), pp 760-762 (1965)

- N -

- | 84 | NAGULESWARAN S. and WILLIAMS C.J.H. "Lateral Vibration of Bandsaw Blades, Pulleys Belts and the like" Intl. J. Mech. Sci. 10 pp 239-250 (1968)

85 NOVOSEL'TSEV V.P. and SELEZNEV A.F. "Effect of Changes in Tension Force on the Dynamic Stability of Frame Saws and Band Saws", Lesn. Zh., 16 (6) pp 75-78 (1974)

- P -

86 PAHLITZSCH G. "Internationaler Stand. Der Forschung auf dem Gebiet des Säges", Holz Roh-Werkstoff, 20 (10) pp 381-392 (1962)

87 PAHLITZSCH G. and DZIUBEK K., "Untersuchungen an einer Horizontalen Block-band Säge", Holz Roh-Werkstoff, 17, (9) pp 364-376 (1959)

88 PAHLITZSCH G. and ECKERT V., "Investigations of Bandsaw Noise", Holz und Kunststoffverarbeitung, 10 (7), pp 518-522 (1975)

89 PAHLITZSCH G. and PUTTKAMMER K., "Die Beanspruchungen von Bandsägeblättern : Spannungen und Festigkeitsgrenzen", Holz Roh-Werkstoff, 30 (5), pp 165-174 (1972)

90 PAHLITZSCH G. and PUTTKAMMER K., "Beurteilungskriterien für die Auslenkungen von Band-Sägeblättern, Erste Mitteilung", Holz Roh-Werkstoff, 32 (2), pp 52-57 (1974)

91 PAHLITZSCH G. and PUTTKAMMER K., "Beurteilungskriterien für die Auslenkungen von Bandsägeblättern, Zweite Mitteilung", Holz Roh-Werkstoff, 32 (8) pp 295-302 (1974)

92 PAHLITZSCH G. and PUTTKAMMER K., "Ermittlung der Steifheit von Bandsägeblättern" Holz Roh-Werkstoff, 31 (4) pp 161-167 (1973)

93 PAHLITZSCH G. and PUTTKAMMER K., "Schnittversuche beim Bandsägen", Holz Roh-Werkstoff, 33 (5), pp 181-186 (1975)

94 PAHLITZSCH G. and PUTTKAMMER K., "Schnittversuche beim Bandsägen", Holz-Werkstoff, 34 (1), pp 17-21 (1976)

95 PAHLITZSCH G. and PUTTKAMMER K., "Beurteilungskriterien für die Auslenkungen von Bandsägeblättern. Dritte Mitteilung", Holz Roh-Werkstoff, 34 pp 413-426 (1976)

96 PORTER A.W. "Some Engineering Considerations of High Strain Bandsaws", Forest. Prod. J., 21 (4), pp 24-32 (1971)

- Q -

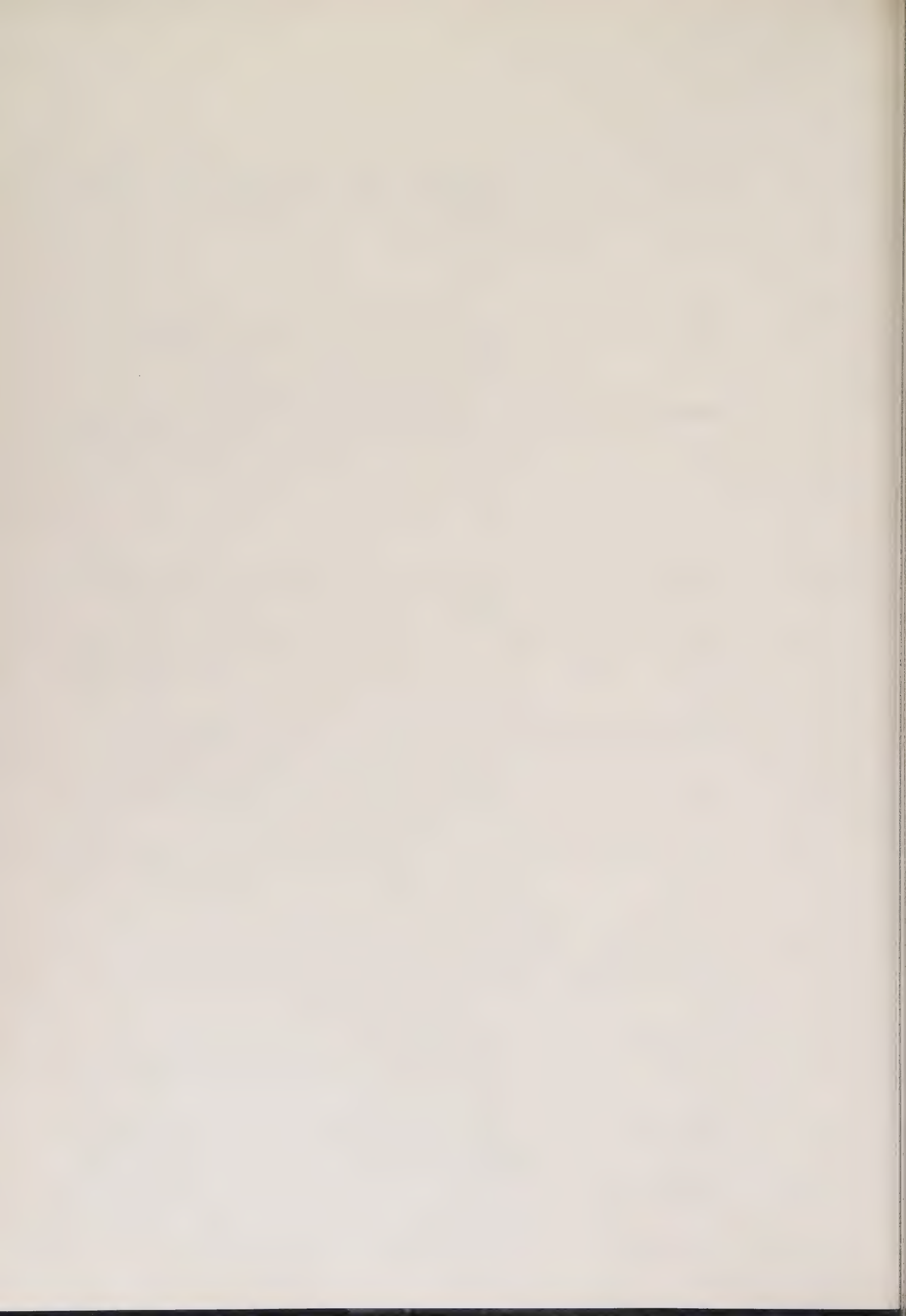
- | 97 | QUINN R. "Automation of Heat Tensioning", Brit. Columbig Lumbermen ; 50 (8), pp 124-125 (1966)

- R -

- | 98 | RHODES J.E. Jr. "Parametric Self-Excitation of a Belt into Transverse Vibration", J. Appl. Mech. Trans. ASME, 37 (4), pp 1055-1060 (1970)
- | 99 | RODEMAN R., LONGCOPE D.B. and SHAMPINE L.F. "Response of a String to an Accelerating Mass", ASME Paper No 76-WA/APM-26 (1976)

- S -

- | 100 | SACK R.A. "Transverse Oscillations in Travelling Strings", British J. Appl. Phys. 5, pp 224-226 (1954)
- | 101 | SAGARTZ M.J. and FORRESTAL M.J. "Motion of a Stretched String Loaded by an Accelerating Force", J. Appl. Mech. Trans. ASME, 43 (2), pp 505-506 (1975)
- | 102 | SALJE E. and THOMAS D. "A novel Guide for Band Saw Blades", Holz-Zentralblatt, 102 (148), p 2109 (1976)
- | 103 | SANEV V.I. "Heating of Bandsaws Blades while Sawing Wood", Lesn, Zh, 12 (3) pp 64-67 (1976)
- | 104 | SANEV V.I. and PLIJUSNIN V.N. "Theoritical Investigation of the Temperature Distribution across the width of the Blade of a Bandsaw Edger", Lesn. Zh. 12 (6) pp 61-67 (1969)
- | 105 | SANEV V.I. and PLIJUSNIN V.N. "Temperature Gradient along the Leugth of Bandsaw Blades while sawing Wood". Lesn. Zh. 13 (2) pp 59-64 (1970)
- | 106 | SHIH L.Y. "Three Dimensional Nonlinear Vibration of a Travelling String", Intl. J. Nonlinear Mech., 6 pp 427-434 (1971)
- | 107 | SHTOL'TSER N.G. "Theory and Principles of Tensioning wide Band Saws", Woodworking Ind. pp 415-418 (Aug. 1976)
- | 108 | SIMPSON A. "Transverse modes and Frequencies of Beams Translating between Fixed End Supports", J. Mech. Engr. Sci. 15 (3), pp 159-164 (1973)



- | 109 | SINHA S.C. and SRINIVASAN P. "Free Transverse Vibrations of an Axially Moving Mass" Rev. Roum. Sci. Tech. 20 (4) pp 535-553 (1975)
- | 110 | SOLER A.I. "Vibration and Stability of a Moving Band", J. Franklin Inst. 286 (4) pp 295-307 (1968)
- | 111 | SUGIHARA H. "Forces Acting on a Bandsaw". Jap. Wood. Ind. 8 (5), pp 38-45 (1959)
- | 112 | SUGIHARA H. "Untersuchungen Über die am Bandsägeblatt wirksamen Kräfte", Intern. Holzmarkt, 25 (16) pp 36-41 (1955)
- | 113 | SUGIHARA H. "The Influence of Temperature on the Stability of Saw Blades". IVFRO Proc. Vol. 3, Sec. 41 (1965)
- | 114 | SWOPE R.D. and AMES W.F. "Vibrations of a moving Threadline", J. Franklin Inst. 275 (1), pp 36-55 (1963)
- | 115 | SZYMANI R. and DICKINSON F.E. "Recent Developments in Wood Machining Processes : Novel Cutting Techniques", Wood Sci. Technol. 9 (2), pp 113-128 (1975)
- | 116 | SZYMANI R. and MOTE C.D.Jr. "Principal Developments in Thin Circular Saw Vibration and Control Research, Part 2 : Reduction and Control of Saw Vibration", Holz Roh-Werkstoff, 35 (6), pp 219-225 (1977)

- T -

- | 117 | TABARROK B., LEECH C.M. and KIM Y.I. "On the Dynamics of an Axially Moving Beam" J. Franklin Inst. 297 (3) pp 201-220 (1974)
- | 118 | THUNELL B. "Die Stabilität des Bansasageblattes" Holz Roh-Werkstoff 28 (9) pp 343-348 (1970)
- | 119 | THUNELL B. "Über die Ma haltigkeit beim Trennen mit Bandsägemaschines", Holztechnologie. Dtsch. (1972) 13 (1), pp 28-33
- | 120 | THUNELL B. "Dimensional Accuracy in Sawing", Proc. Wood Mach. Sem. Univ. Cal. Forest Prod. Lab. pp 39-51 (1971)
- | 121 | THUNELL B. "The Stresses in a Bandsaw Blade", Paperi ja Puu, 54 (11), pp 759-764 (1972)
- | 122 | THUNELL B. "Ergonomic Aspects : Noise Problems in the Sawmill", Proc. Wood Mach. Sem. Univ. Cal. Forest Prod. Lab. pp 193-204 (1973)



- | 123 | THUNELL B. and NOREN B. "Stability investigation on frame saw blades"
Paperi Ja Puu, 46 (8), (10), (11) and (12) (1964)
pp 453-460, 565-580, 665, 678, 717-720
- | 124 | THURMAN A.L. and MOTE C.D. Jr. "Free Periodic Nonlinear Oscillation of
an Axially Moving Strip". J. Appl. Mech. Trans.
ASME, 36, pp 83-91 (1969)
- | 125 | THURMAN A.L. and MOTE C.D. Jr. "Nonlinear Oscillation of a Cylinder
Containing a Flowing Fluid", J. Engr. Indus.,
Trans. ASME, 91, pp 1147-1155 (1969)
- | 126 | TING E.C., GENIN J. and GINSBERG J.H. "A General Algorithm for Moving
Mass Problems", J. Sound Vib., 33 (1) pp 49-58
(1974)
- | 127 | TORBY B.J. "Deflection Results from Moving Loads on a Beam
that Rests Upon an Elastic Foundation Reacting
in Compression only" J. Appl. Mech. Trans. ASME
42 pp 738-739 (1975)
- | 128 | TRUBNIKOV I.I. "Stresses in Bandsaws Blades Subjected to Surface
Tensioning" Lesn. Zh. 8 (2) pp 104-108 (1965)
- | 129 | TRUBNIKOV I.I. "Fatigue Failure of Band Saw Blades" Lesn. Zh.
8 (6), pp 91-93 (1965)
- | 130 | TRUBNIKOV I.I. and LEIKHTLING R.A. "Effect of Surface Hammering on the
Fatigue Strength of Bandsaw Blades". Les. Del.
Mekh. Tekn. Drev. pp 169-171 (1969)

- V -

- | 131 | VESELKOV V.I. "Investigation of the Residual Stresses in Frame
Saw Blades" Lesn. Zh. 14 (2), pp 69-73 (1971)

- W -

- | 132 | WILLISTON E.M. "Lumbering Manufacturing" Miller Freeman Publ.
pp 466-476 (1976)
- | 133 | WUSTER E. "Die Berechnung der Reckvorspannungen in Gatter-
nid Band-Sägeblättern", Holz Roh-Werkstoff, 24
(14) pp 134-144 (1966)

- Y -

- | 134 | YUREV Y.I. and VESELKOV V.I. "Effect of the Operation of Cutting the
Teeth on the Stress State of Band Resaws" Lesn. Zh.
15 (1) pp 65-67 (1972)

